In the Name of God

DYNAMICS

[Course No. 8102128]

Dr. Mehdi Ghassemieh

m.ghassemieh@ut.ac.ir
Tel. 6111-2273
Fax. 6640-3808

پردیس دانشکده های فنی
University College of Engineering

بنام خدا

دینامیک (نیمسال ۲-۹۷-۹۶)

شماره درس ۸۱۰۲۱۲۸

دکتر مهدی قاسمیه

دانشکده مهندسی عمران

فصل اول:

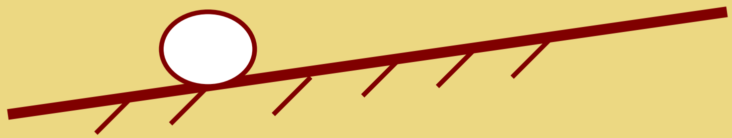
KINEMATICS OF PARTICLES

سینماتیک ذرات

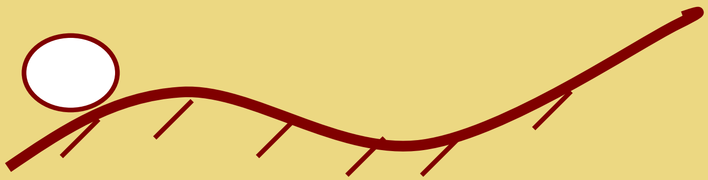
سینماتیک ذرات : هندسه حرکت بدون اشاره به عامل حرکت

انواع حرکت نقاط مادی (مسیر) :

حرکت مستقیم الخط **Rectilinear Motion**



حرکت منحنی الخط **Curvilinear Motion**



حرکت مطلق **Absolute Motion**

تشریح حرکت با مختصات ثابت

حرکت نسبی **Relative Motion**

تشریح حرکت با مختصات متحرک

حرکت مستقیم الخط:

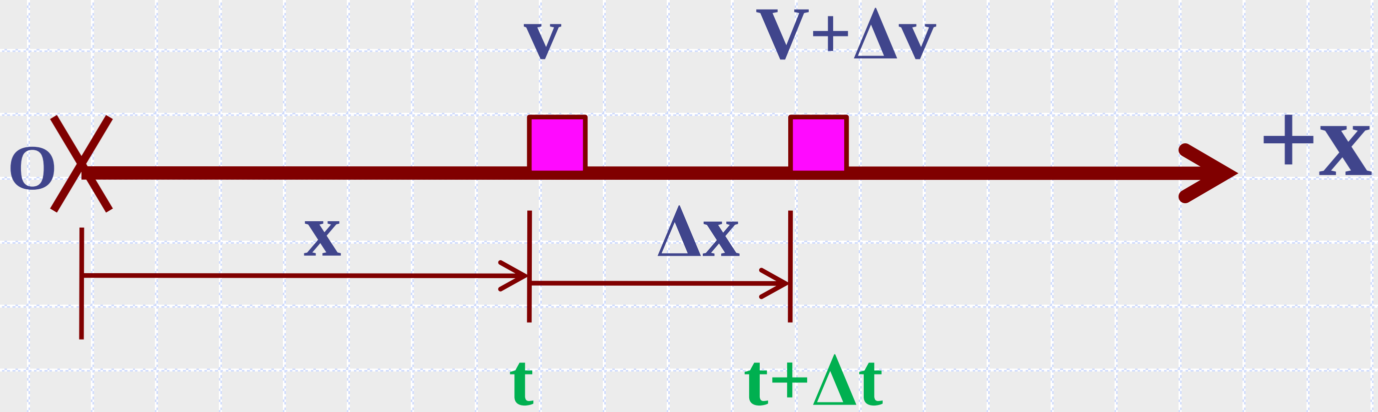
وقتی یک نقطه مادی در امتداد خطی مستقیم حرکت نماید. در صورتی که در هر لحظه ی معین مانند t ، این ذره مادی در یک نقطه ی معین روی آن خط باشد.

موقعیت = x (position)

سرعت = v (velocity)

شتاب = a (acceleration)

جابجائی = Δx (displacement)

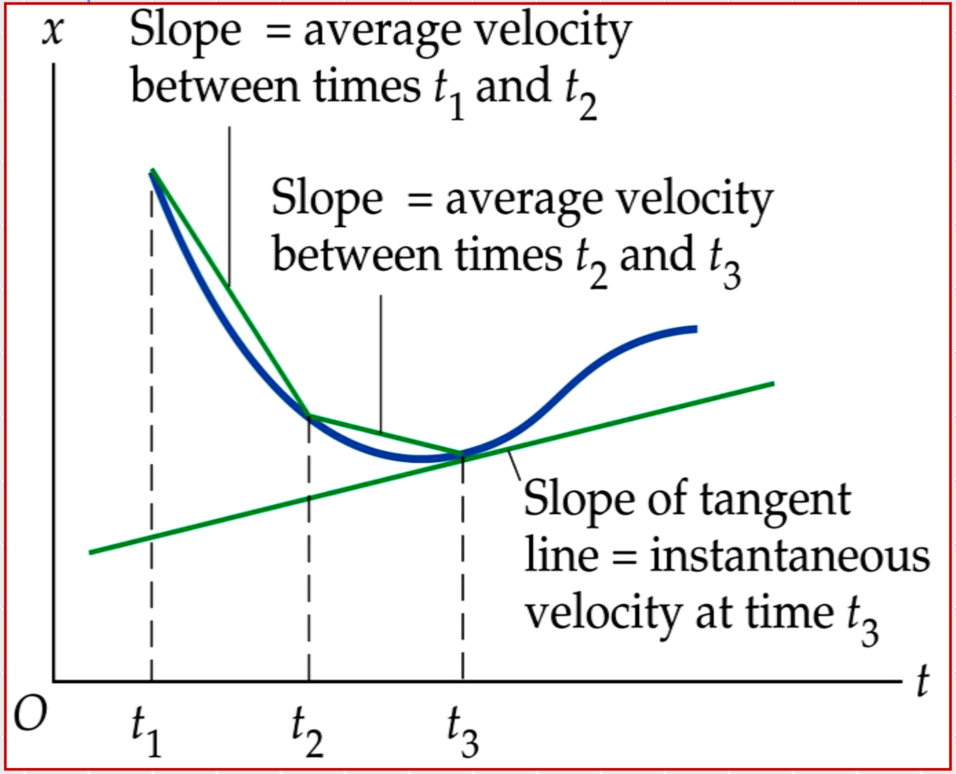


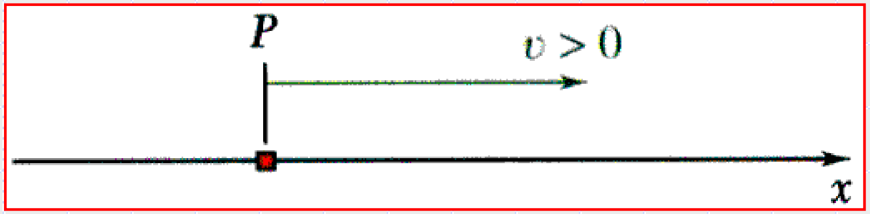
سرعت متوسط (Average Velocity) :

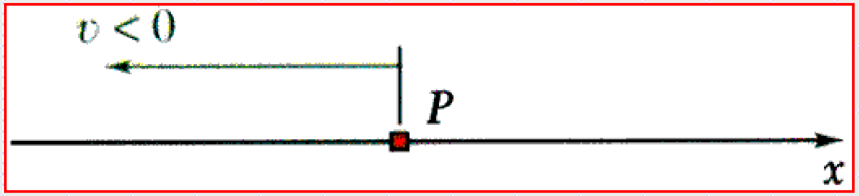
$$\bar{v} = \frac{(x+\Delta x)-x}{t+\Delta t-t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

سرعت لحظه ای (Instantaneous Velocity) :

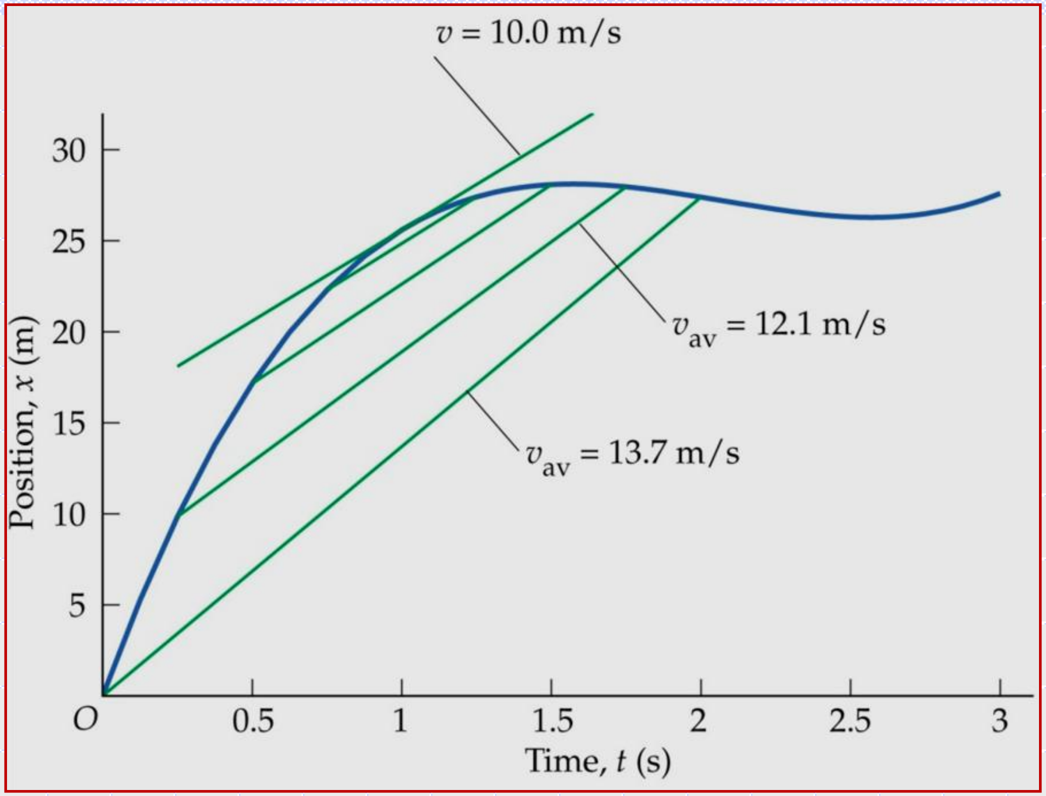
$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$





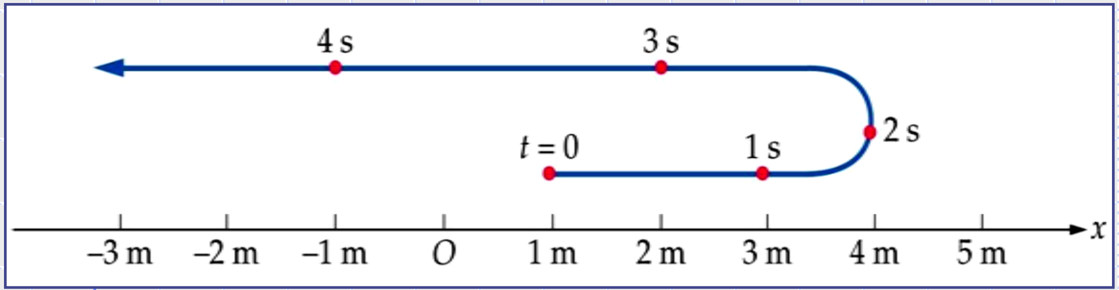


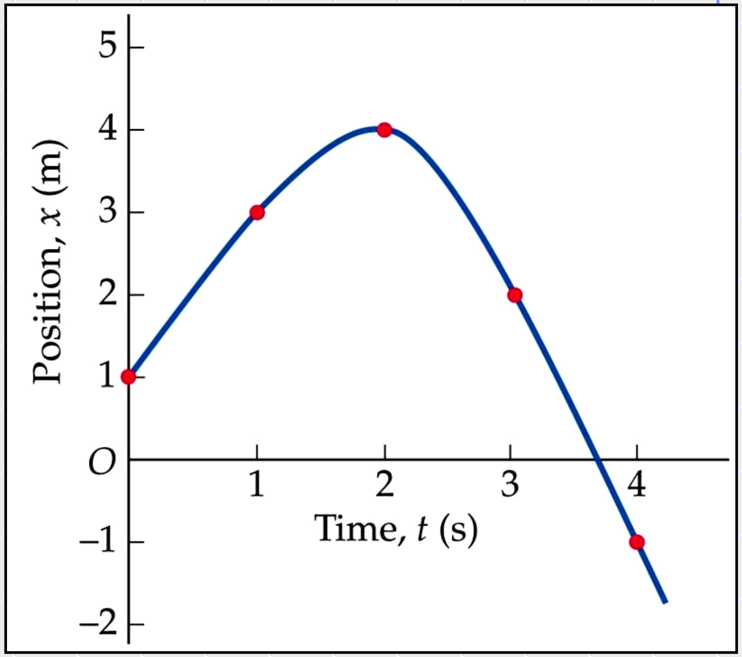
t (s)	x (m)
0	0
0.25	9.85
0.50	17.2
0.75	22.3
1.00	25.6
1.25	27.4
1.50	28.1
1.75	28.0
2.00	27.4



محاسبه سرعت لحظه ای در
$t = 1$ (s)

t_i(s)	t_f(s)	Δt(s)	x_i(m)	x_f(m)	Δx(m)	v_{av}(m) = $\Delta x/\Delta t$(m/s)
0	2.00	2.00	0	27.4	27.4	13.7
0.250	1.75	1.50	9.85	28.0	18.2	12.1
0.500	1.50	1.00	17.2	28.1	10.9	10.9
0.750	1.25	0.50	22.3	27.4	5.10	10.2
0.900	1.10	0.20	24.5	26.5	2.00	10.0
0.950	1.05	0.10	25.1	26.1	1.00	10.0





سرعت متوسط

Average velocity (0 to 4 sec.) =
(-2 m)/(4 s) = - 0.5 m/s

تندی متوسط

Average speed (0 to 4 sec.) =
(8 m)/(4 s) = 2 m/s

مقدار سرعت = تندی

$$v(t) = \left|\vec{v}(t)\right|$$

$$\bar{a}=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{((v+\Delta v)-v)}{(t+\Delta t)-t}$$: (Average Acceleration) شتاب متوسط

:(Instantaneous Acceleration) شتاب لحظه ای

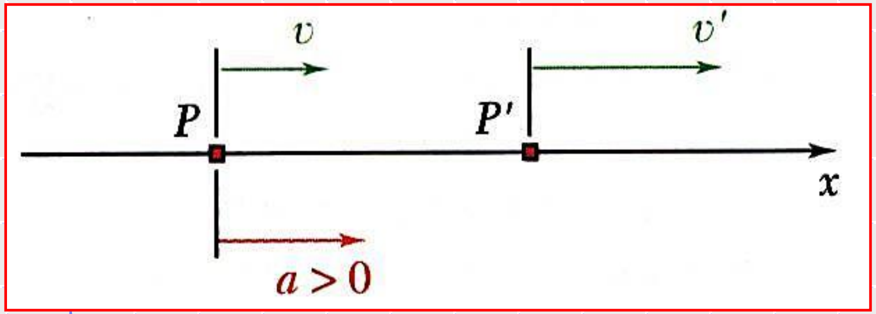
$$\boldsymbol{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta \boldsymbol{t}}=\frac{\boldsymbol{dv}}{\boldsymbol{dt}}$$

$$\mathrm{v}=\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}}=\dot{\mathrm{x}},\quad \mathrm{a}=\frac{\mathrm{dv}}{\mathrm{dt}}=\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{x}}{\mathrm{dt}^2}=\dot{\mathrm{v}}=\ddot{\mathrm{x}}$$

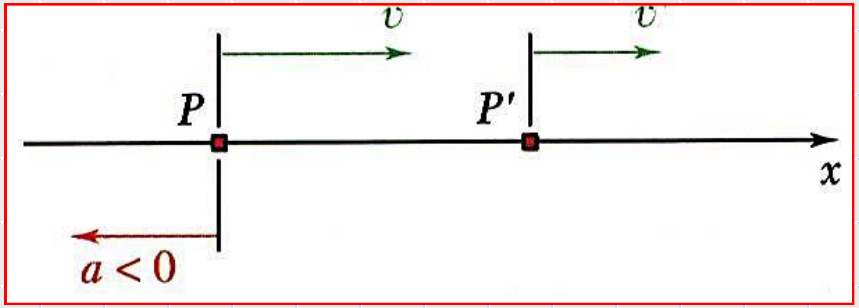
$$v=\frac{dx}{dt}\Rightarrow dt=\frac{dx}{v}$$

$$a=\frac{dv}{dt}\Rightarrow\frac{dv}{dx/v}=\frac{vdv}{dx}$$

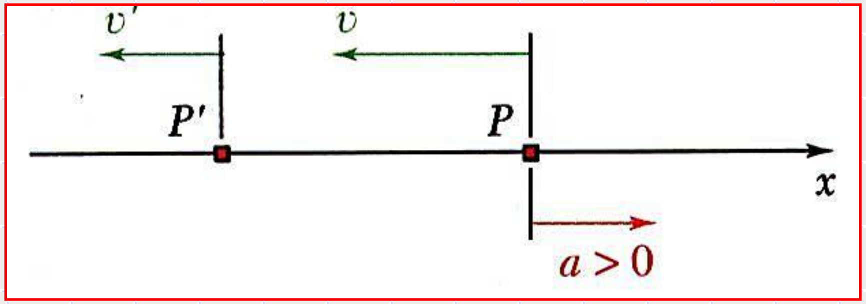
$$vdv=adx$$



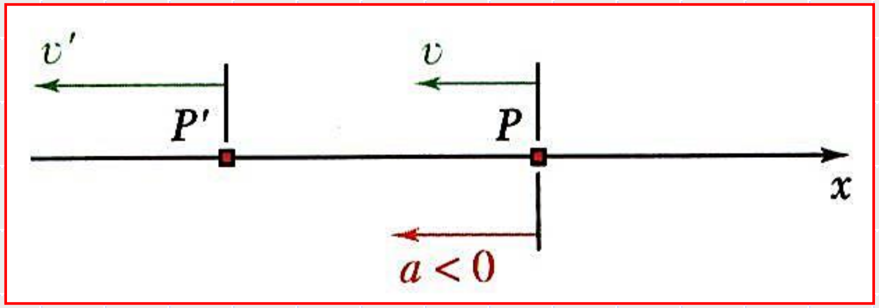
v
v'
P
P'
x
$a>0$



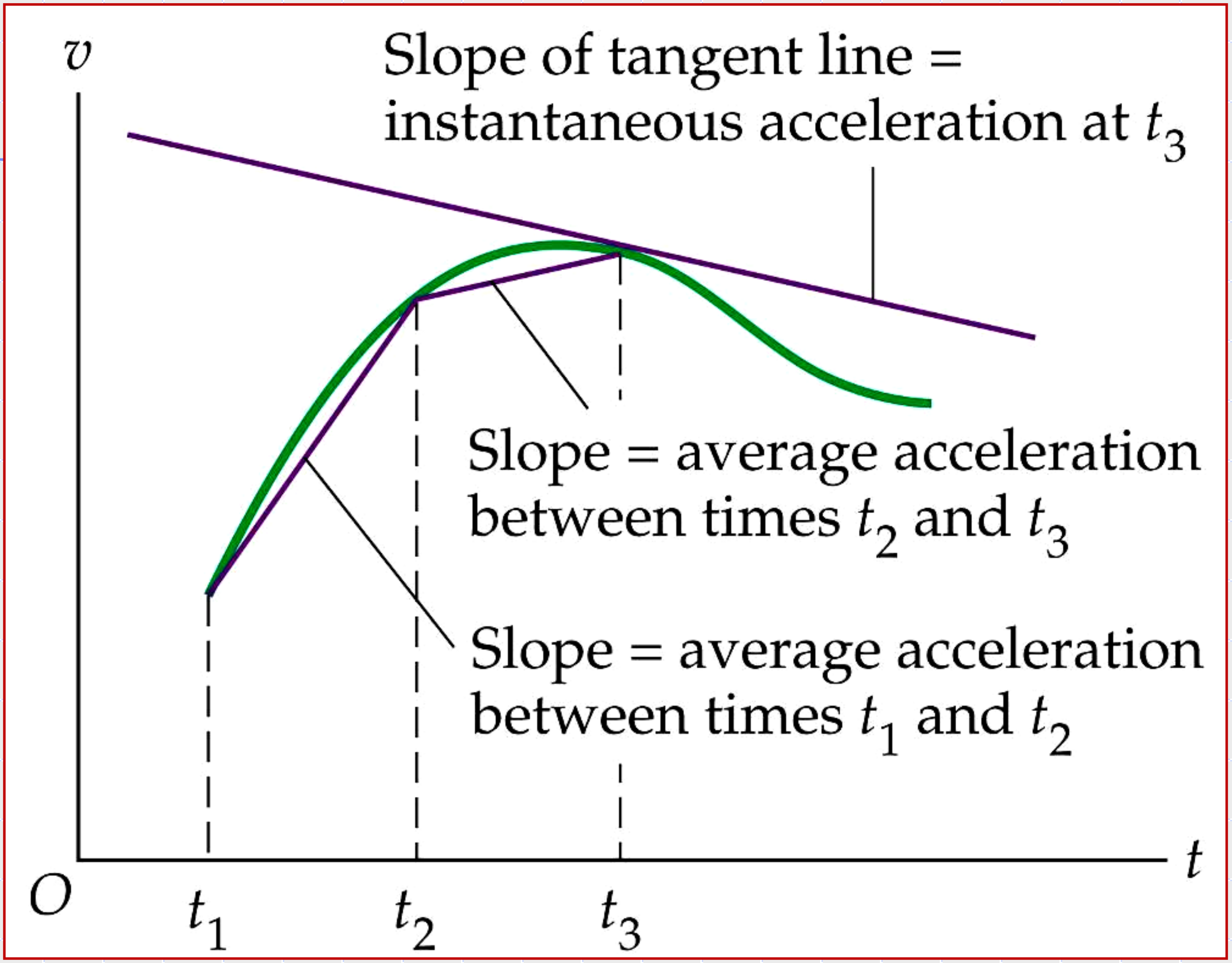
v
v
P
P'
x
$a<0$



v'
v
P'
P
x
$a>0$

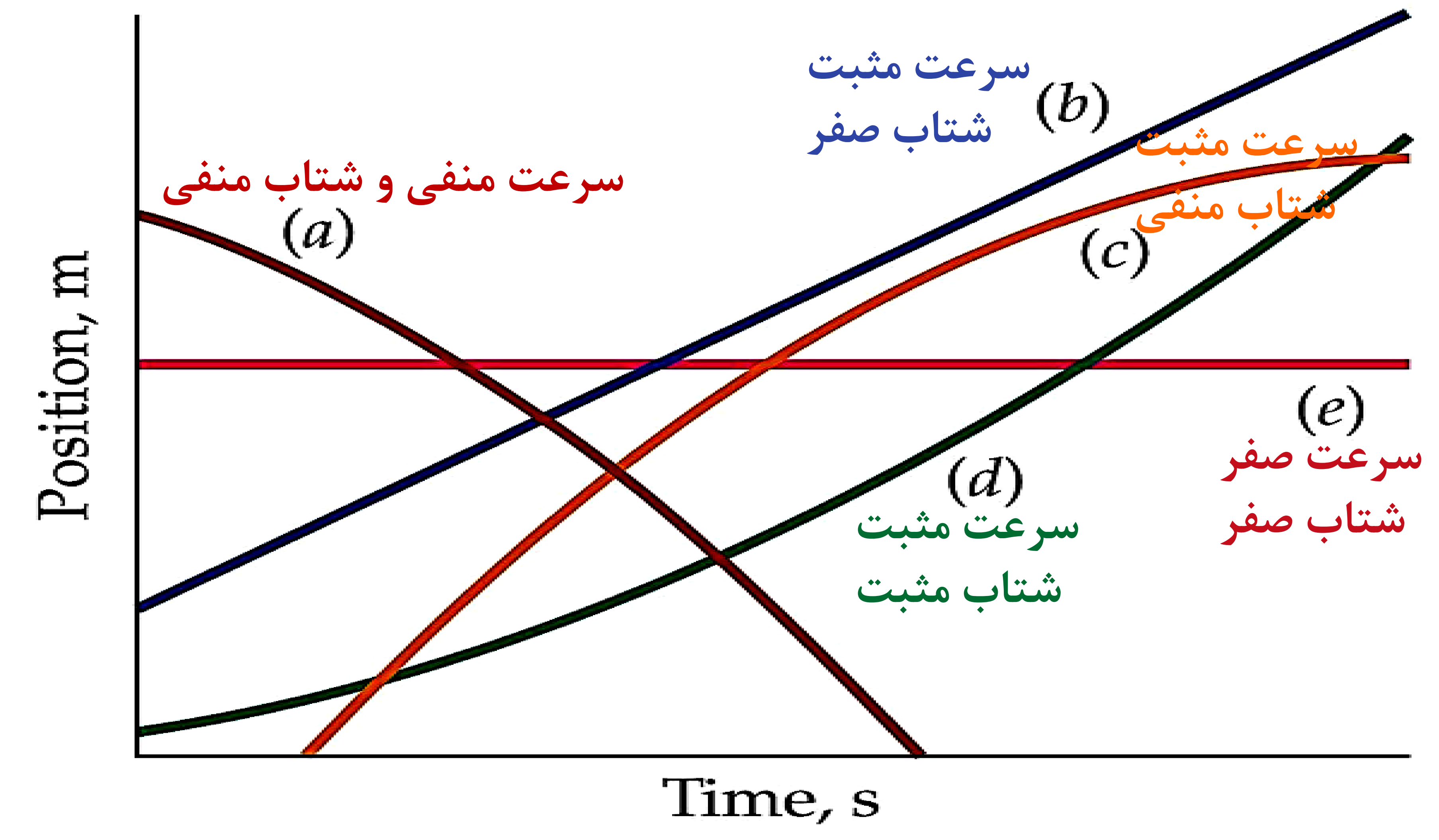


v'
v
P'
P
x
$a<0$



v
Slope of tangent line = instantaneous acceleration at t_3
Slope = average acceleration between times t_2 and t_3
Slope = average acceleration between times t_1 and t_2
O
t_1
t_2
t_3
t

موقعیت، سرعت و شتاب



حالتهای خاص حرکت مستقیم الخط:

۱ – حرکت مستقیم الخط یکنواخت

۲– حرکت مستقیم الخط با شتاب ثابت

حرکت مستقیم الخط یکنواخت

(Uniform Rectilinear Motion)

در این نوع حرکت نقطه ی مادی در امتداد خط مستقیم با سرعت ثابت حرکت می نماید و در نتیجه شتاب صفر است.

$$a = 0 \quad \Rightarrow \quad v = cons. \quad \Rightarrow \quad x = x_0 + vt$$

حرکت مستقیم الخط با شتاب ثابت

(Uniformly Accelerated Rectilinear Motion)

در این نوع حرکت نقطه ی مادی در امتداد خط مستقیم با شتاب ثابت حرکت میکند.

$$a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow adt = dv \Rightarrow \int_0^t adt = \int_{v_0}^{v} dv$$

$$\boxed{at = v - v_0 \Rightarrow v = v_0 + at}$$

$$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \int_0^t vdt = \int_{x_0}^{x} dx \Rightarrow x - x_0 = \int_0^t (v_0 + at)dt$$

$$\boxed{x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2}$$

حرکت نقطه مادی با تابع شتاب

1- اگرشتاب تابع زمان باشد: $a = f(t)$

$$a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow f(t)dt = dv \Rightarrow \int_0^t f(t)\,dt = \int_{v_0}^{v} dv$$

$$\boxed{\Rightarrow \quad v = g(t)}$$

$$v = g(t)\ ,\ \ v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \int_0^t v dt = \int_{x_0}^{x} dx = \int_0^t g(t)\,dt$$

$$\boxed{\Rightarrow \quad x = h(t)}$$

2- اگر شتاب تابع مکان باشد: $a = f(x)$

$$a\,dx = v\,dv = f(x)\,dx = v\,dv$$

$$\Rightarrow \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx = \int_{v_0}^{v} v\,dv = \frac{1}{2}(v^2 - v_0^2) \Rightarrow v = g(x)$$

$$v = \frac{dx}{dt} = g(x) \Rightarrow \frac{dx}{g(x)} = dt \Rightarrow \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{g(x)} = \int_{0}^{t} dt$$

$$\Rightarrow t = h(x) \Rightarrow x = l(t)$$

3- اگر شتاب تابع سرعت باشد: $a = f(v)$

$$a = \frac{dv}{dt} = f(v) \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{f(v)} = dt \Rightarrow \int_{v_0}^{v} \frac{dv}{f(v)} = \int_0^t dt$$

$$\Rightarrow \quad t = g(v) \quad \Rightarrow \quad v = h(t)$$

$$vdv = adx \quad \Rightarrow \quad vdv = f(v)dx \quad \Rightarrow \quad \int_{v_0}^{v} \frac{vdv}{f(v)} = \int_{x_0}^{x} dx$$

$$\Rightarrow \quad x = l(v)$$

$$v = h(t) = \frac{dx}{dt} \quad \Rightarrow \quad \int h(t)dt = \int dx \quad \Rightarrow \quad x = k(t)$$

4- ارتباط بین متغیرهای موقعیت، سرعت و شتاب:

$$a = \frac{dv}{dt} \quad \Rightarrow \quad dv = a\,dt$$

$$\int_{v_1}^{v_2} dv = \int_{t_1}^{t_2} a\,dt \quad \Rightarrow v_2 - v_1 = \int_{t_1}^{t_2} a\,dt$$

$$v = \frac{dx}{dt} \quad \Rightarrow \quad dx = v\,dt$$

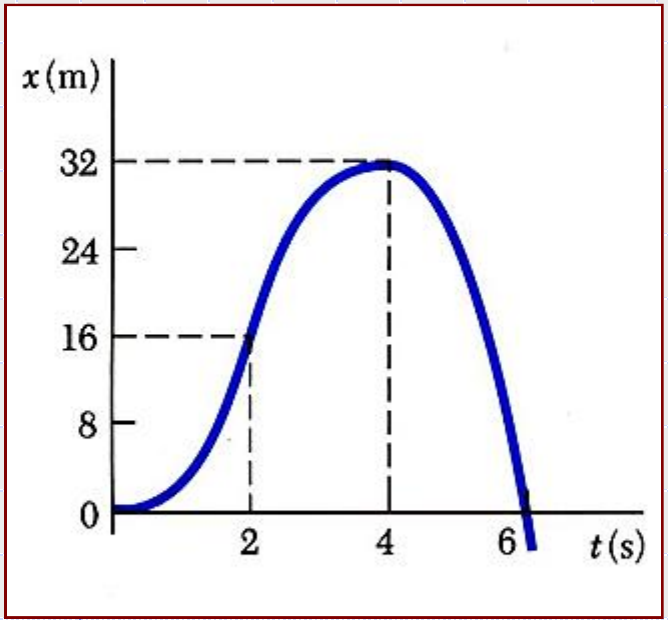
$$\int_{x_1}^{x_2} dx = \int_{t_1}^{t_2} v\,dt \Rightarrow \; x_2 - x_1 = \int_{t_1}^{t_2} v\,dt$$

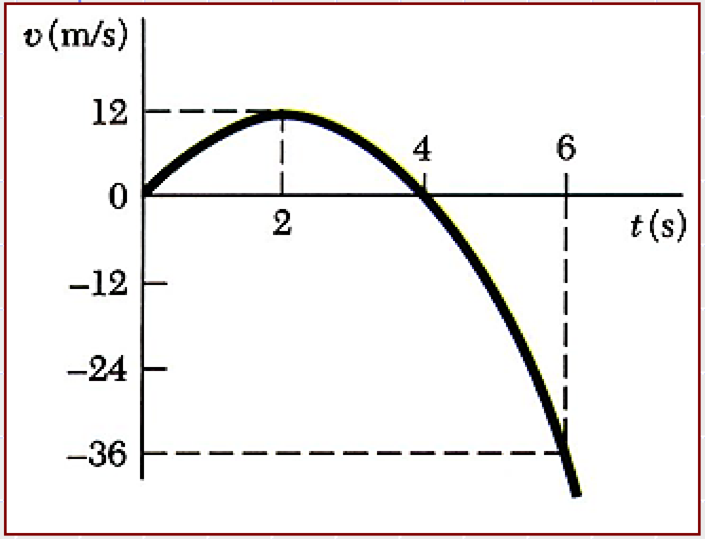
(Graphical Solution) روش ترسیمی

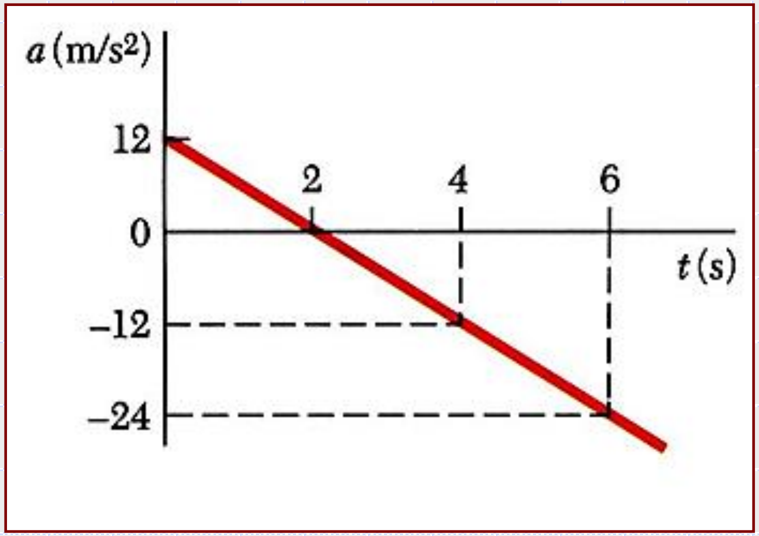
$$x = 6t^2 - t^3$$

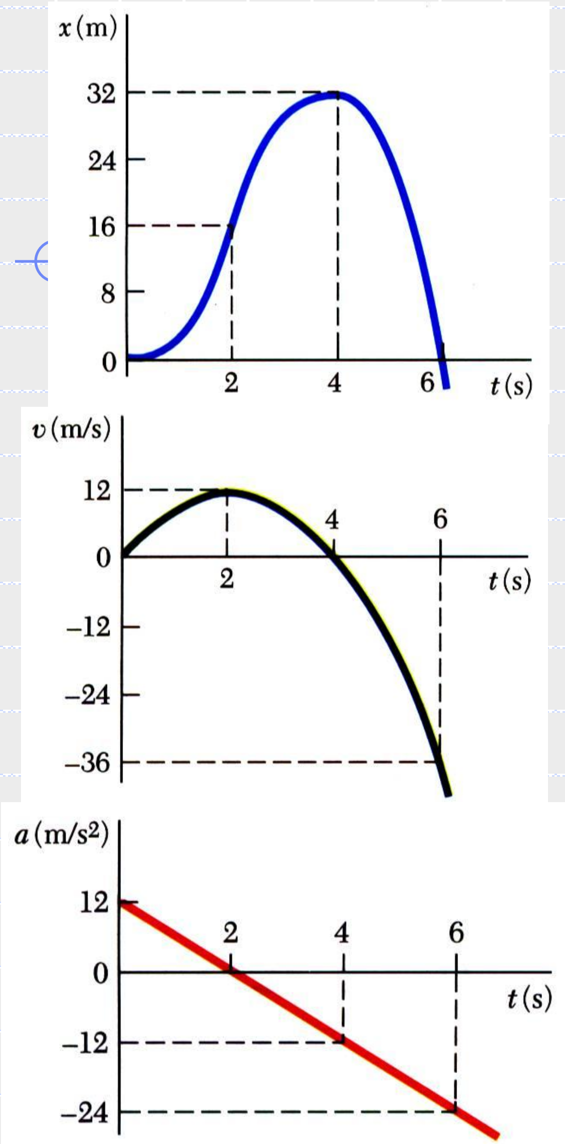
$$v = 12t - 3t^2$$

$$a = \frac{dv}{dt} = 12 - 6t$$









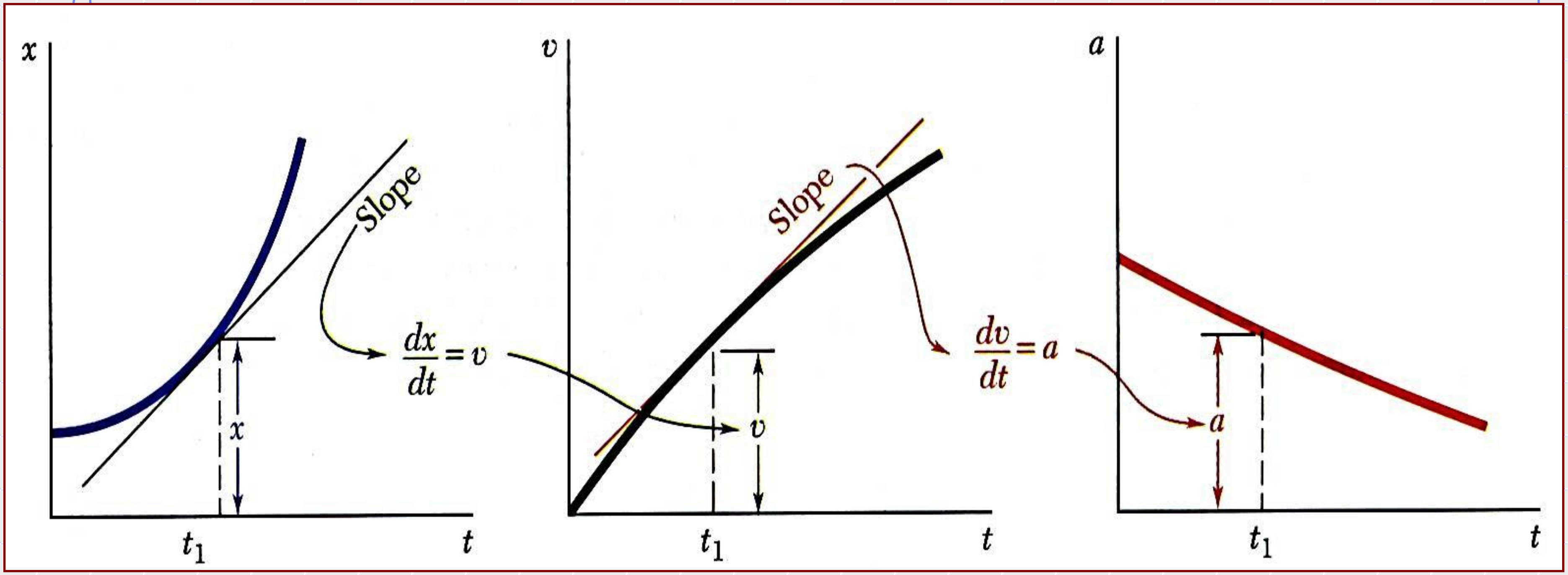
$$x = 6t^2 - t^3$$

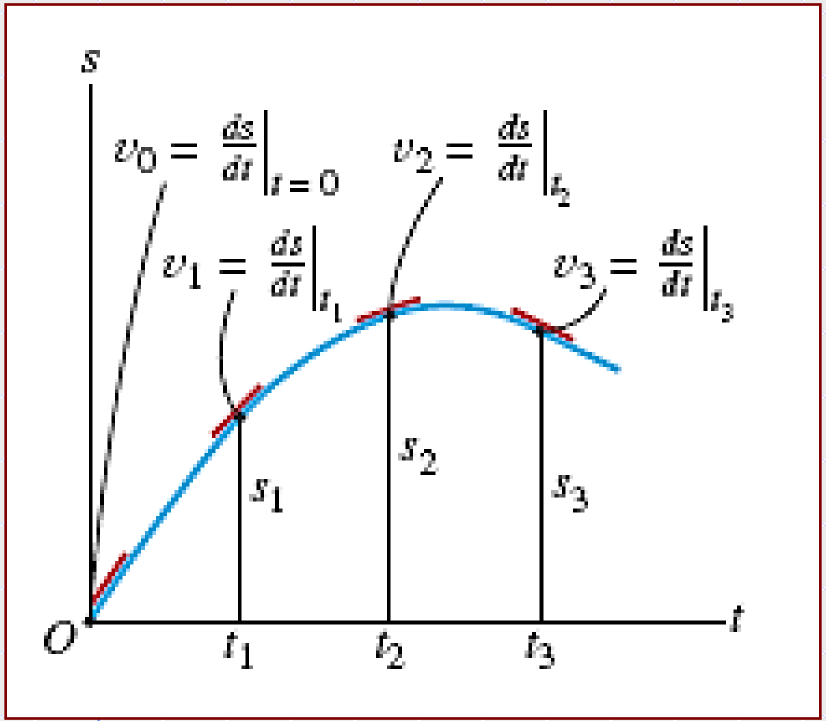
$$v = \frac{dx}{dt} = 12t - 3t^2$$

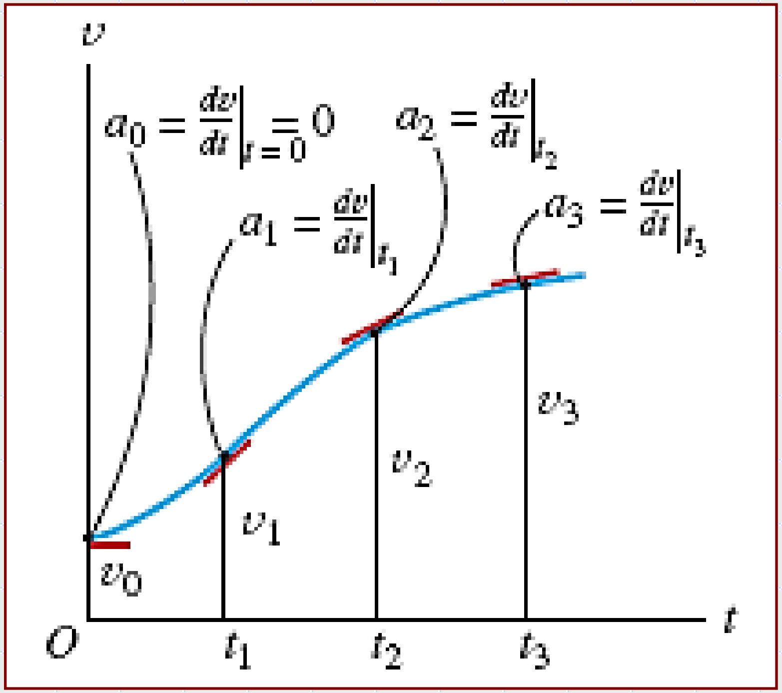
$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = 12 - 6t$$

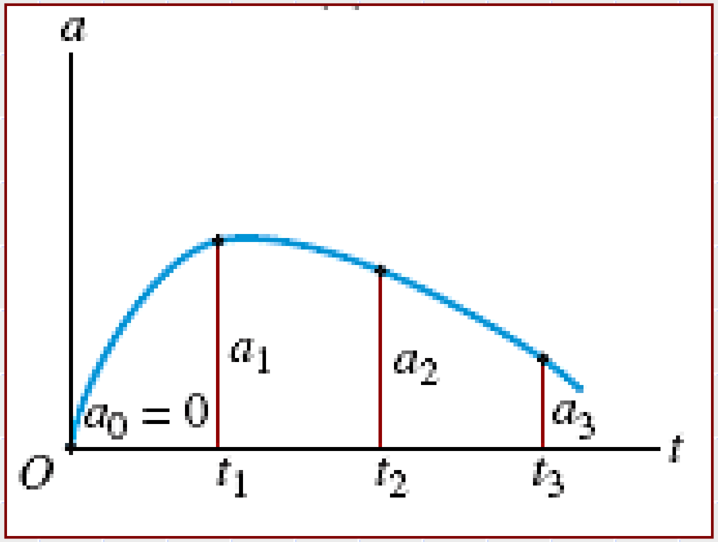
- at t=0s $\Rightarrow x = 0\ ,\ v = 0\ ,\ a = 12\, {}^{m}\!/_{s^2}$
- at t=2s $\Rightarrow x = 16m\ ,\ v = v_{\max} = 12\, {}^{m}\!/_{s}\ ,\ a = 0\, {}^{m}\!/_{s^2}$
- at t=4s $\Rightarrow x = x_{\max} = 32m,\ v = 0,\ a = -12\, {}^{m}\!/_{s^2}$
- at t=6s $\Rightarrow x = 0,\ v = -36\, {}^{m}\!/_{s}\ ,\ a = 24\, {}^{m}\!/_{s^2}$

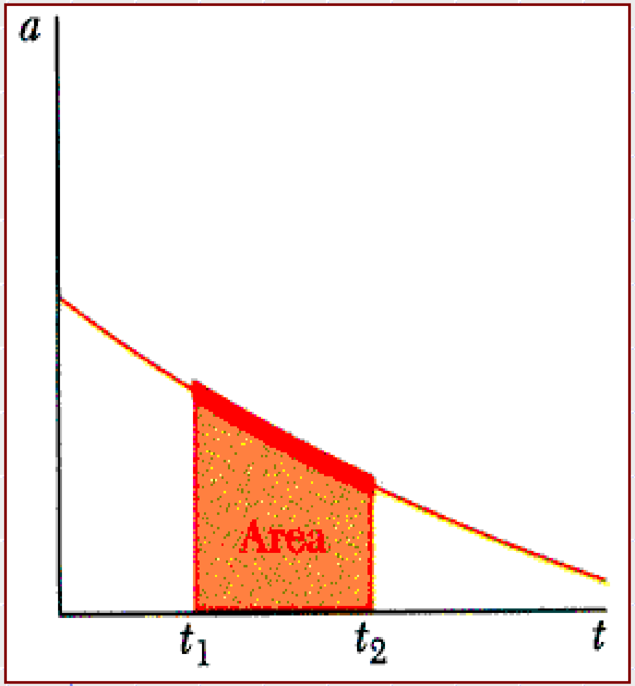
ارتباط بین موقعیت، سرعت و شتاب (Graphical Solution)

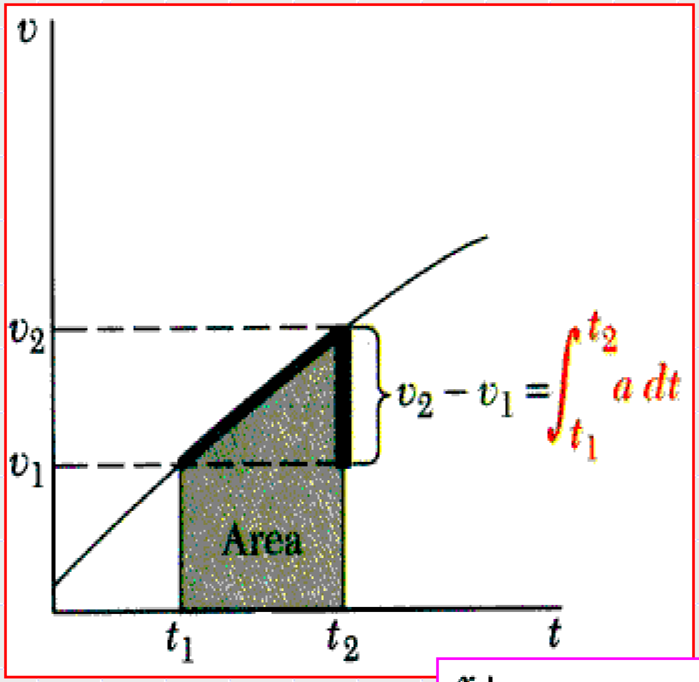


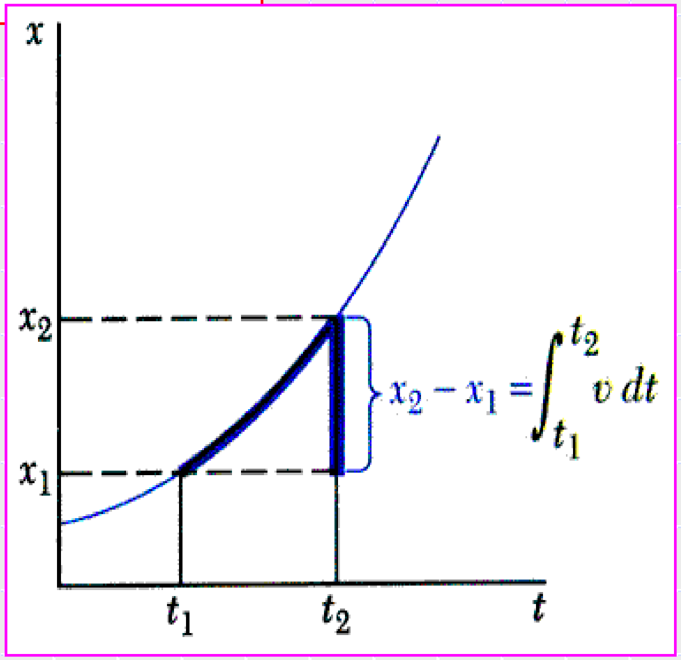

s
$v_0 = \frac{ds}{dt}\Big|_{t=0}$
$v_2 = \frac{ds}{dt}\Big|_{t_2}$
$v_1 = \frac{ds}{dt}\Big|_{t_1}$
$v_3 = \frac{ds}{dt}\Big|_{t_3}$
s_1
s_2
s_3
O
t_1
t_2
t_3
t

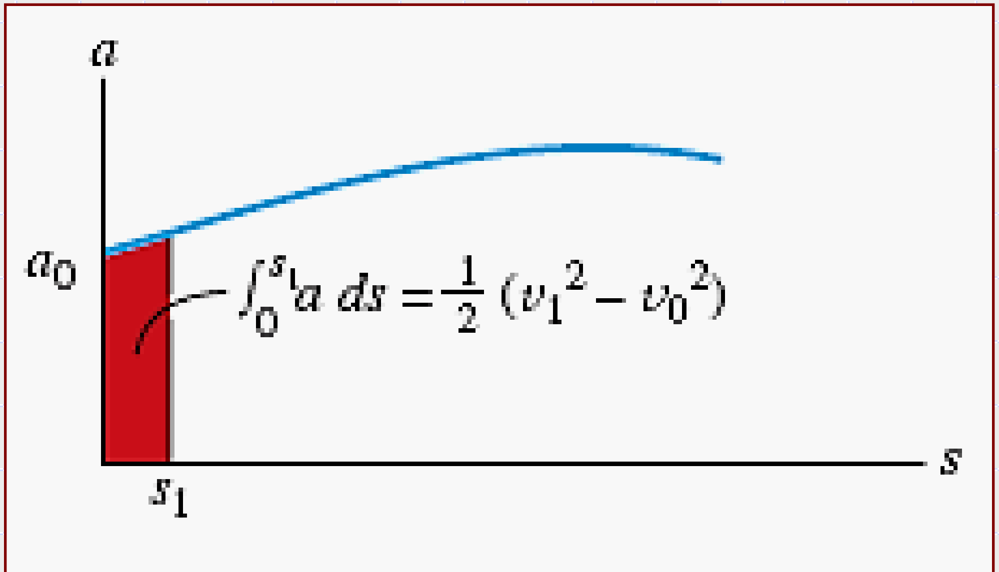

v
$a_0 = \frac{dv}{dt}\Big|_{t=0} = 0$
$a_2 = \frac{dv}{dt}\Big|_{t_2}$
$a_1 = \frac{dv}{dt}\Big|_{t_1}$
$a_3 = \frac{dv}{dt}\Big|_{t_3}$
v_3
v_2
v_1
v_0
O
t_1
t_2
t_3
t


a
a_1
a_2
a_3
$a_0 = 0$
O
t_1
t_2
t_3
t


a
Area
t_1
t_2
t


v
v_2
v_1
$v_2 - v_1 = \int_{t_1}^{t_2} a\,dt$
Area
t_1
t_2
t

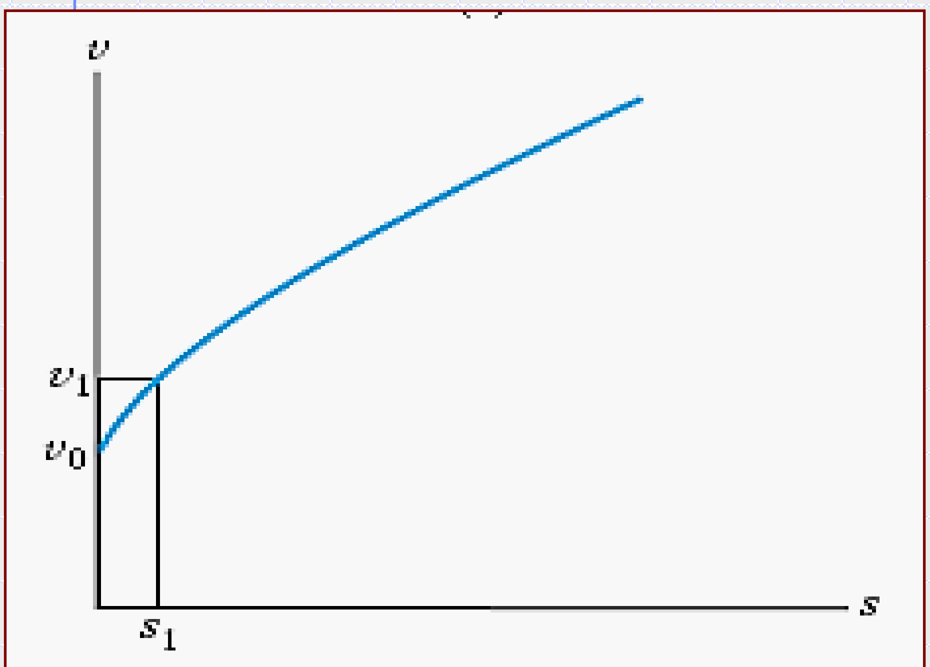

x
x_2
x_1
$x_2 - x_1 = \int_{t_1}^{t_2} v\,dt$
t_1
t_2
t

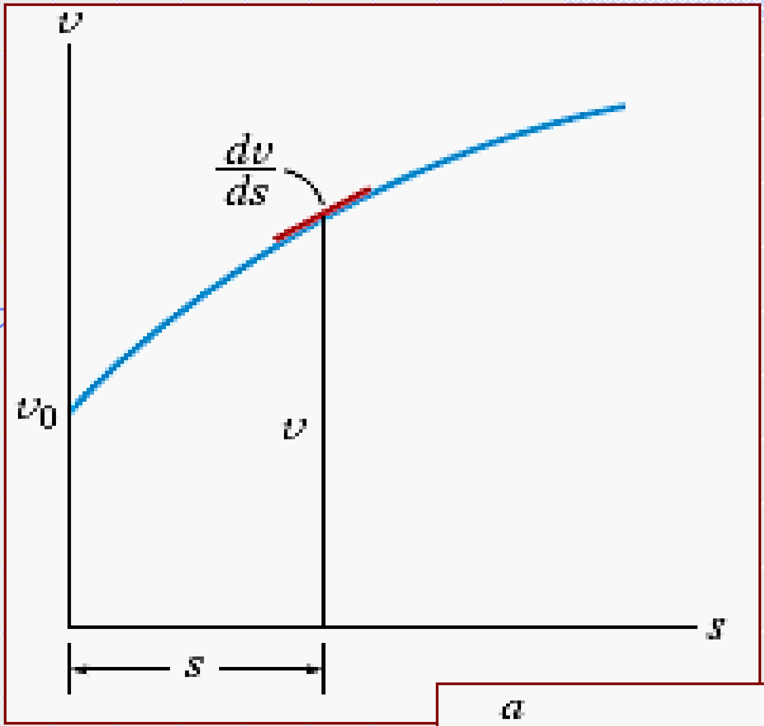


$$\frac{1}{2}(v_1^2 - v_0^2) = \int_{s_0}^{s_1} a\,ds$$

area under

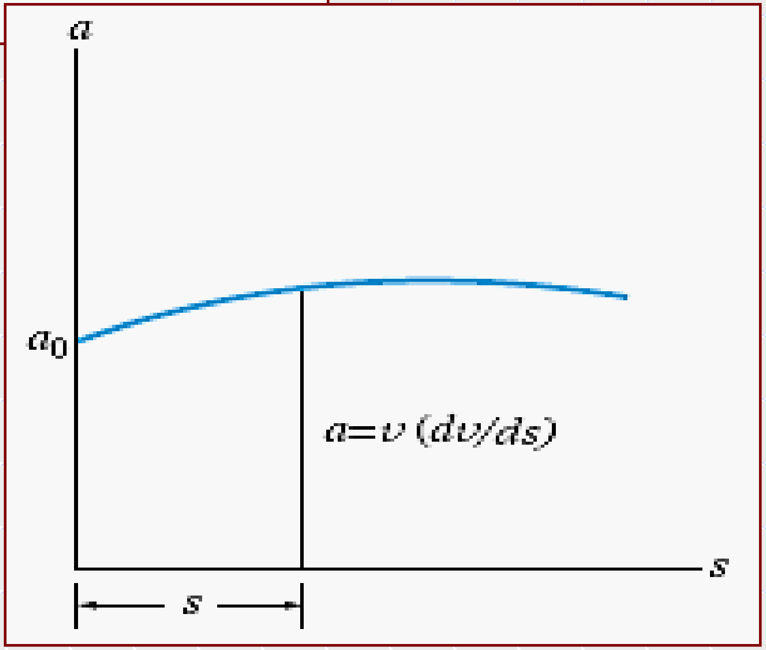
a–s graph

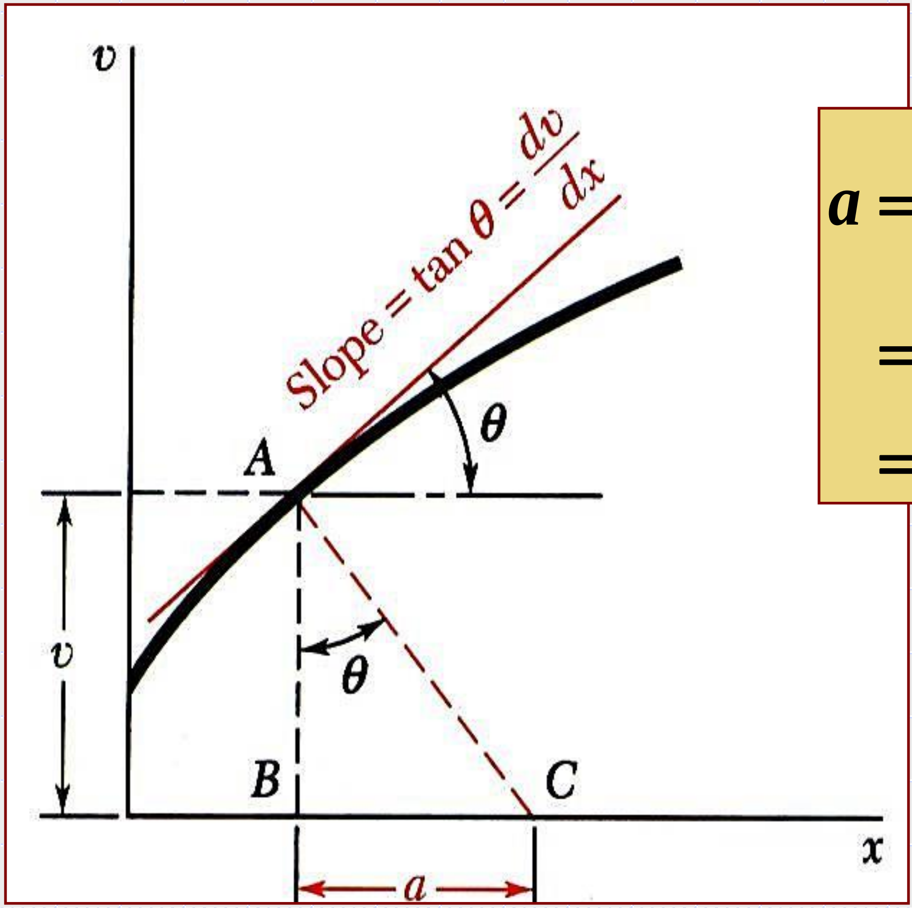




$$a = v\left(\frac{dv}{ds}\right)$$

acceleration = velocity times slope of v–s graph





$$a = v\frac{dv}{dx}$$

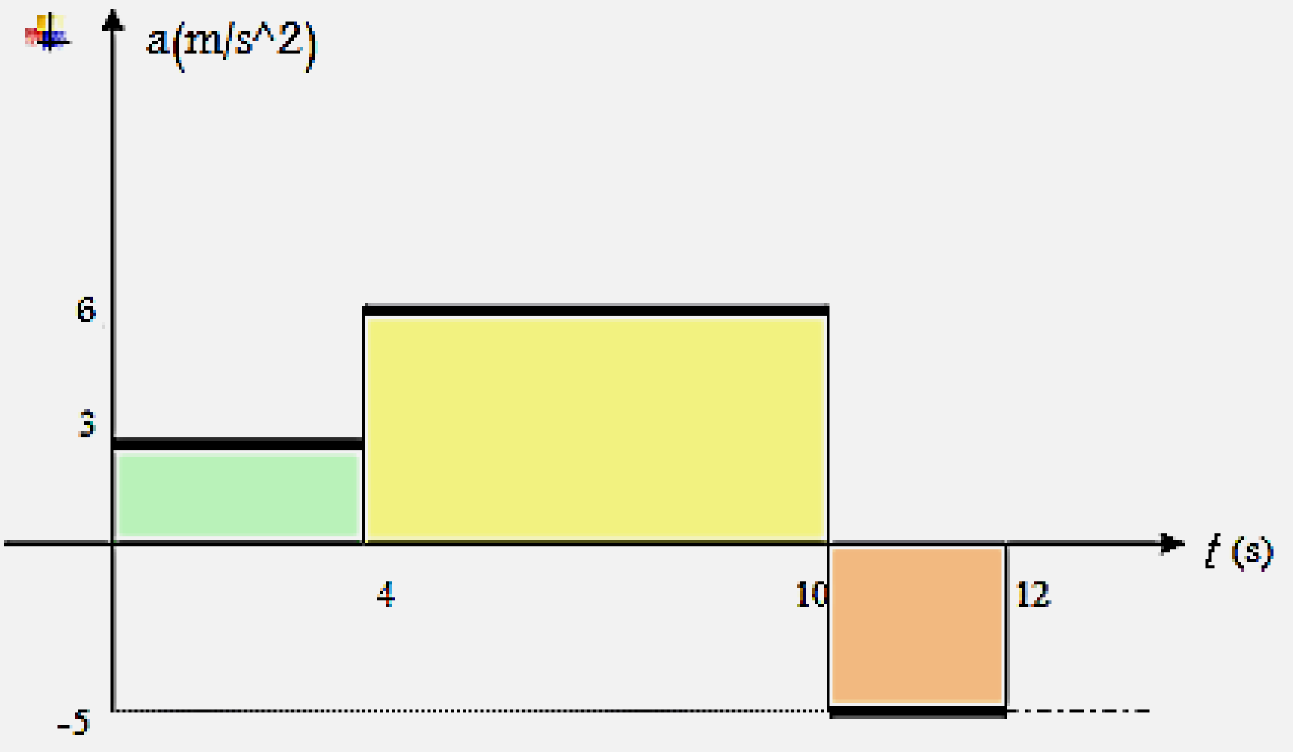
$$= AB\ \tan\theta$$

$$= BC =$$ *subnormal to v-x curve*

مثال: مطلوب است نمودار منحنیهای x-t ,v-t در بین مدت زمان $0 < t < 20$

و همچنین سرعت و موقعیت نقطه مادی در t=12 (s) مسافت طی شده تا 12 (s)

$$x_0 = 0 \qquad v_0 = -18 m/s$$



$$a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow dv = a\,dt \Rightarrow \int_{v_0}^{v_4} dv = \int a\,dt = \int_0^t a\,dt$$

$$v_4 = v_0 + 12 = -18 + 12 = -6 \ \ m/s$$

$$v_{10} = v_4 + 6(6) = -6 + 36 = 30 \ \ m/s$$

$$v_{12} = v_{10} + 2(-5) = 30 - 10 = 20 \ \ m/s$$

$$v_{20} = v_{12} + 8(-5) = -20 \ \ m/s$$

$$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = v\,dt \Rightarrow \int_{x_0}^{x_4} dx = \int_0^{20} v\,dt$$

$$x_4 = x_0 + \int_0^4 v\,dt = 0 - \frac{1}{2}(18+6)(4) = -48m$$

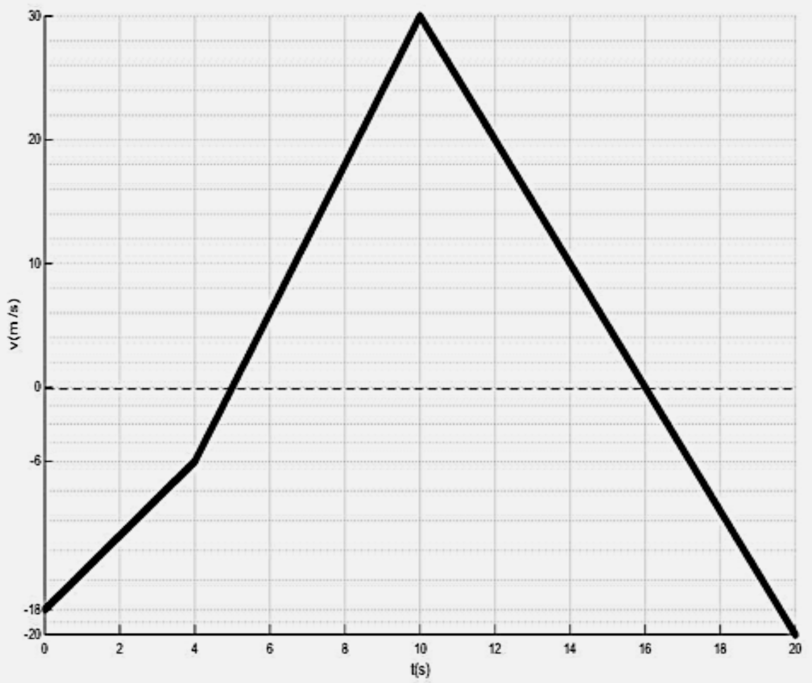
$$x_5 = x_4 + \frac{1}{2}(6)(-1) = -51\ m$$

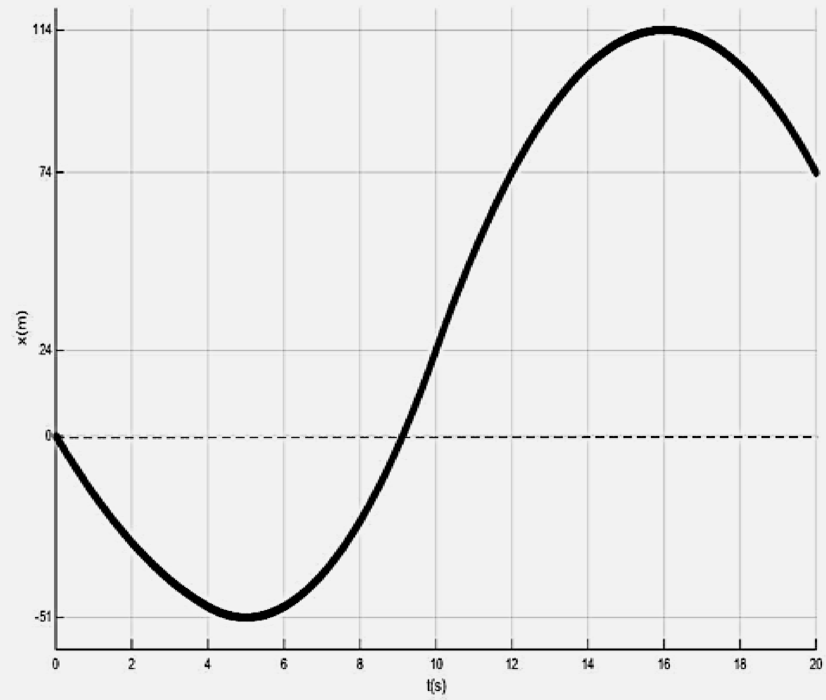
$$x_{10} = x_5 + \frac{1}{2}(30)(5) = 24\ m$$

$$x_{12} = x_{10} + \frac{1}{2}(30+20)(2) = 74\,m$$

$$x_{16} = x_{12} + \frac{1}{2}(20)(4) = 114\ m$$

$$x_{20} = x_{16} + \frac{1}{2}(4)(-20) = 74\ m$$



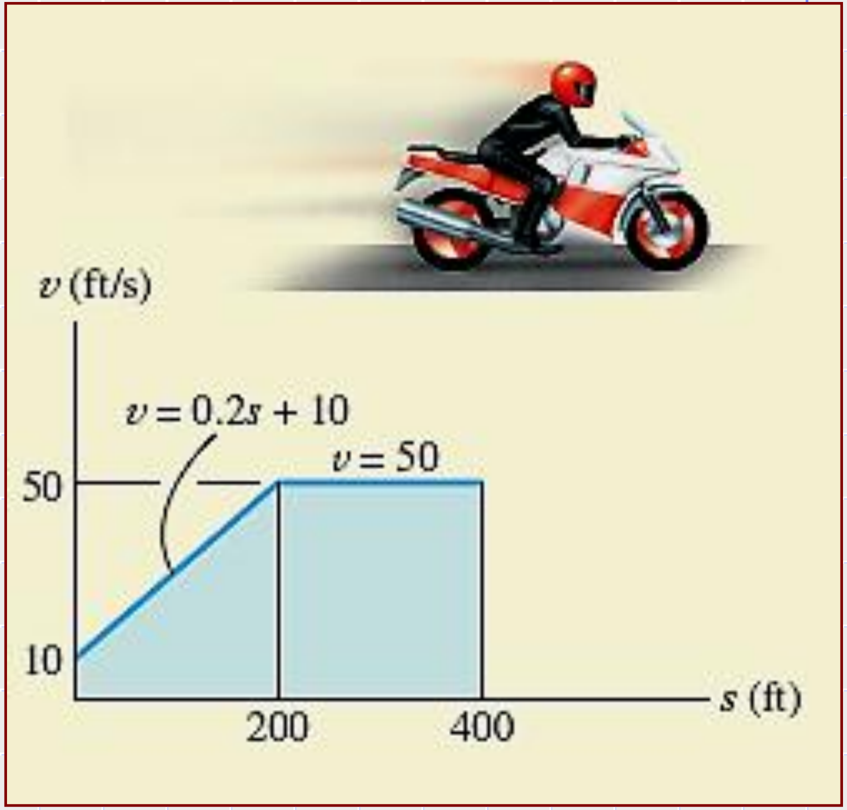


@ t=12 (sec.): مسافت طی شده = 74+51+51 = 176 m

مثال: با توجه به نمودار v-x، مطلوبست ترسیم نمودار *a*-*x* و

زمان لازم برای رسیدن به موقعیت x=400 (ft)

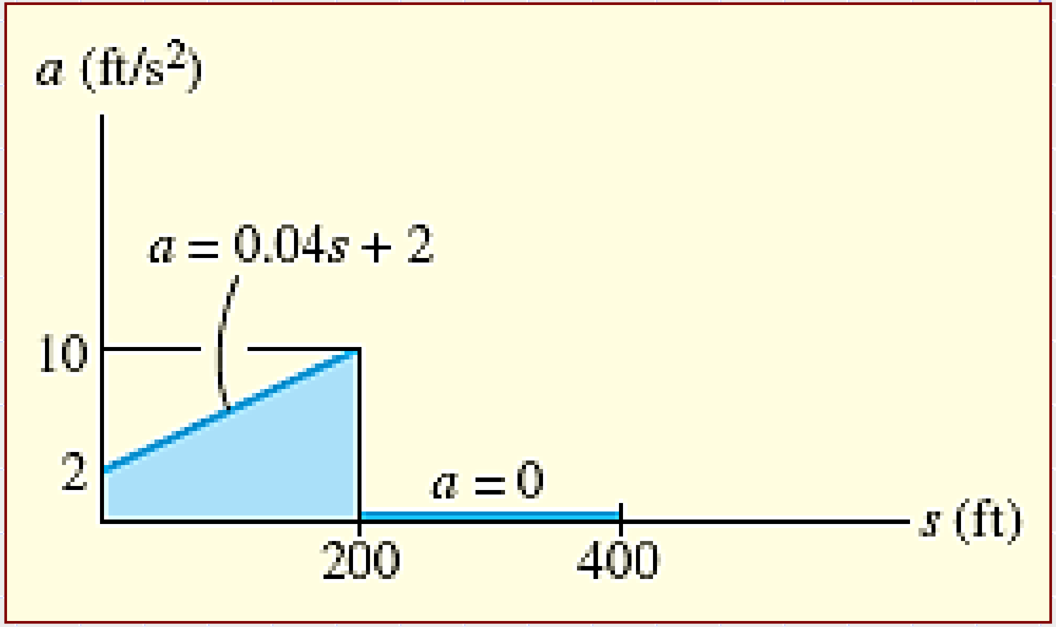
$$\boxed{x_0 = 0}$$



$$\boxed{0 \le x \le 200 \Rightarrow v = 0.2x + 10}$$

$$\boxed{a = v\frac{dv}{dx} = (0.2x + 10)(0.2)}$$

$$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dt = \frac{dx}{v} \Rightarrow \int_0^t dt = \int_0^{200} \frac{dx}{0.2x + 10}$$



$$200 \le x \le 400 \Rightarrow v = 50$$

$$a = v\,\frac{dv}{dx} = 50\,(0) = 0$$

$$0 \le x \le 200 \Rightarrow \int_0^t dt = \int_0^{200} \frac{dx}{0.2x+10}$$

$$t = \frac{1}{0.2} \left| Ln(0.2x+10) \right|_0^{200} = 5\,[Ln(40+10) - Ln(10)]$$

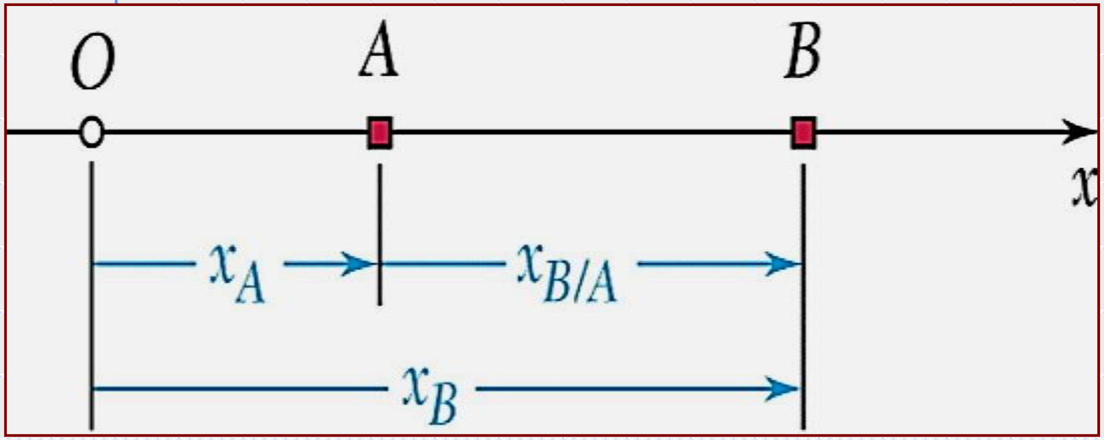
$$\Rightarrow \quad t = 8.05\,(s)$$

$$dt = \frac{dx}{v} \Rightarrow \int_{8.05}^{t} dt = \int_{200}^{400} \frac{dx}{50} \Rightarrow t - 8.05 = \left| \frac{x}{50} \right|_{200}^{400}$$

$$\Rightarrow t = 12\ .05\ (s)$$

حرکت نسبی (Relative Motion)

دو نقطه مادی را در نظر گرفته که در امتداد یک خط مستقیم حرکت می نمایند. هرگاه فاصله ی هر یک را از مبدا حرکت یعنی نقطه ی O به ترتیب با X_A و X_B نشان دهیم:



موقعیت مطلق نقطه $X_B = \mathbf{B}$

موقعیت مطلق نقطه $X_A = \mathbf{A}$

موقعیت نسبی نقطه **B** نسبت به نقطه **A** $= x_{B/A} = x_B - x_A$

$$x_B = x_A + x_{B/A}$$

$$\frac{d}{dt}(x_{B/A})=\frac{d}{dt}(x_B)-\frac{d}{dt}(x_A)$$

سرعت نسبی نقطه B نسبت به A :

$$\boldsymbol{v}_{B/A}=\boldsymbol{v}_B-\boldsymbol{v}_A$$

سرعت مطلق B :

$$v_B=v_A+v_{B/A}$$

$$\frac{d}{dt}(v_{B/A})=\frac{d}{dt}(v_B)-\frac{d}{dt}(v_A)$$

شتاب نسبی نقطه B نسبت به A:

$$\boldsymbol{a}_{B/A}=\boldsymbol{a}_B-\boldsymbol{a}_A$$

شتاب مطلق B :

$$a_B=a_A+a_{B/A}$$

حرکت وابسته نقاط مادی (Dependent Motion)

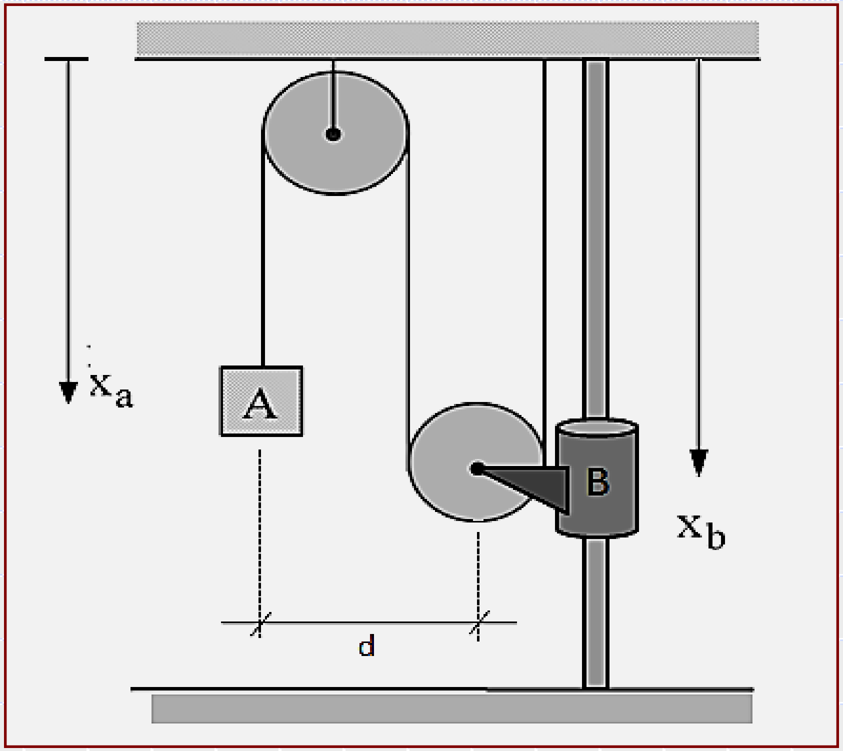
هنگامی که وضعیت حرکت یک نقطه مادی بستگی به وضعیت نقاط مادی متحرک دیگر دارد، در این حالت حرکت را وابسته گویند.

در حرکات وابسته چند جرم، روابط سینماتیک بصورت مشترک بین جرمها ارائه میگردند.

مثال :

با توجه به ثابت بودن طول طناب خواهیم داشت:

L = **ثابت**



$$(x_A - c_1) + c_2 + (x_B - c_3) + c_4 + (x_B - c_5) = c$$

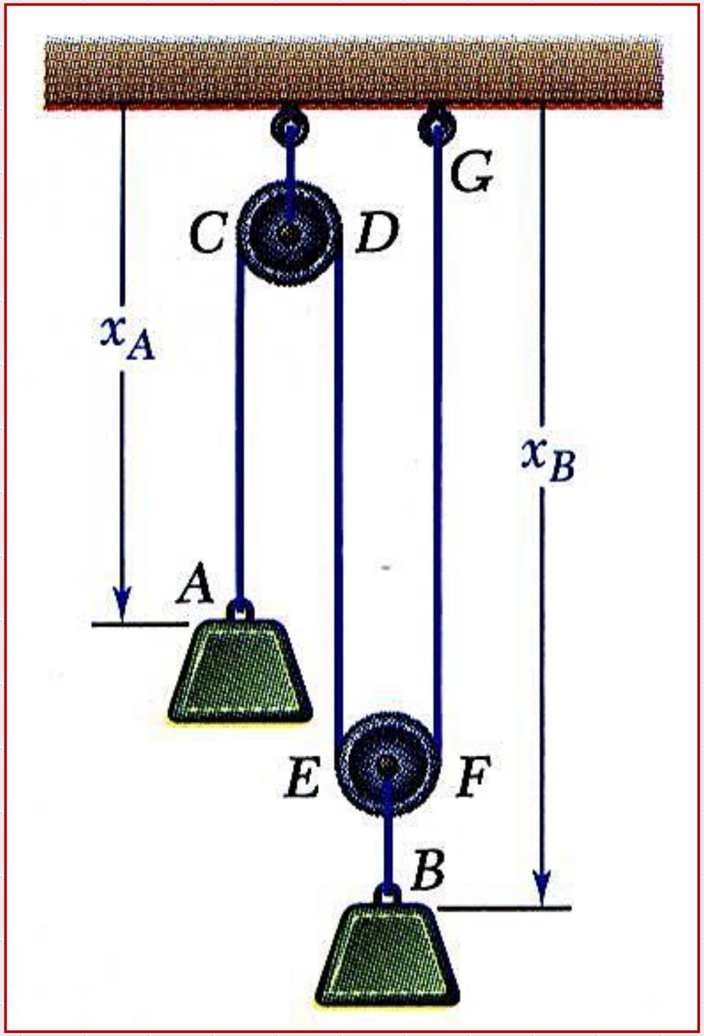
$$x_A + 2x_B = c' \quad , \quad v_A + 2v_B = 0 \quad , \quad a_A + 2a_B = 0$$

توجه : جهت مثبت را به سمت پایین در نظرگرفتیم.

مثال :

با توجه به ثابت بودن طول طناب خواهیم داشت:

L = **ثابت**

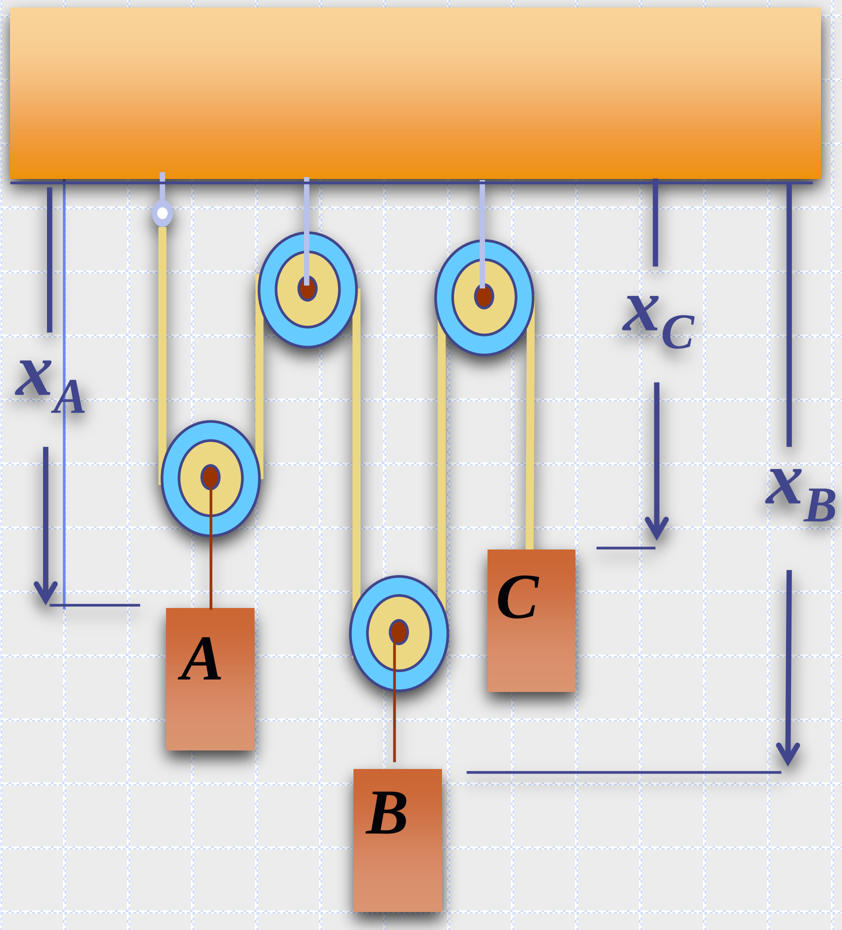


$$x_A + 2x_B = c$$

$$v_A + 2v_B = 0$$

$$a_A + 2a_B = 0$$

مثال :



$$x_A + x_A + x_B + x_B + x_C = c$$

$$2x_A + 2x_B + x_C = c$$

$$2v_A + 2v_B + v_C = 0$$

$$2a_A + 2a_B + a_C = 0$$

مثال :

$$s_B + s_B + h + s_A = c$$

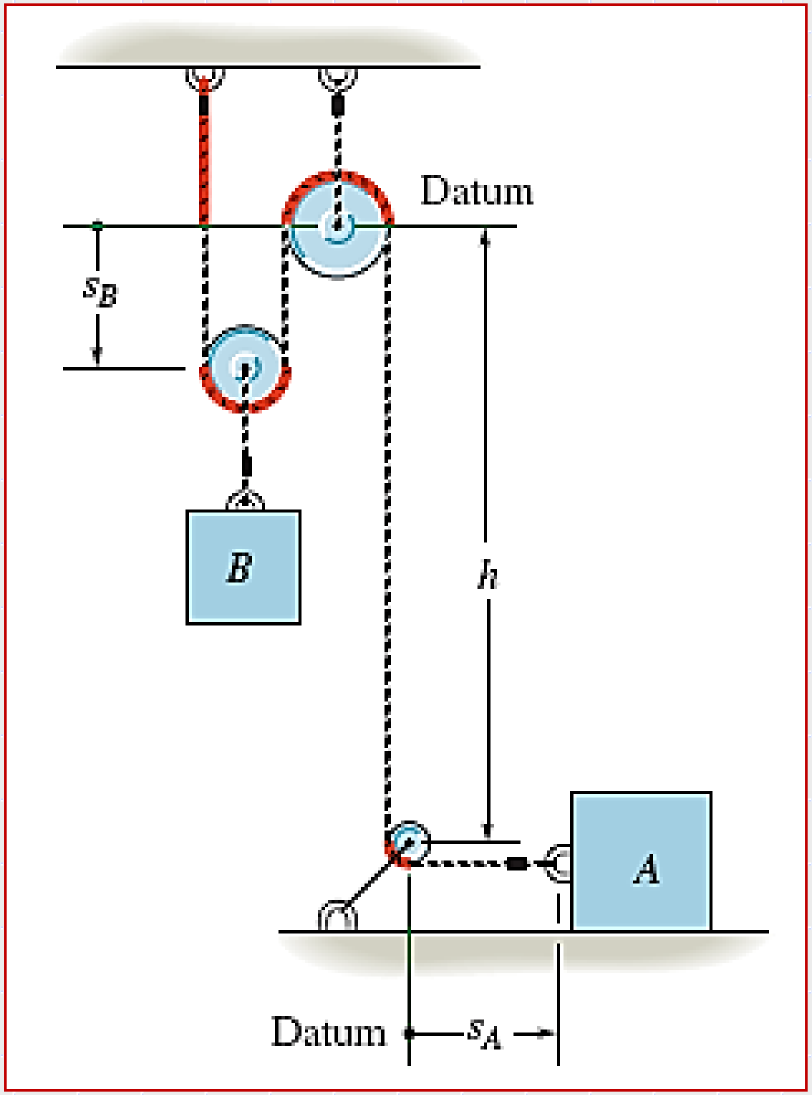
$$2s_B + s_A = c'$$

$$2v_B + v_A = 0$$

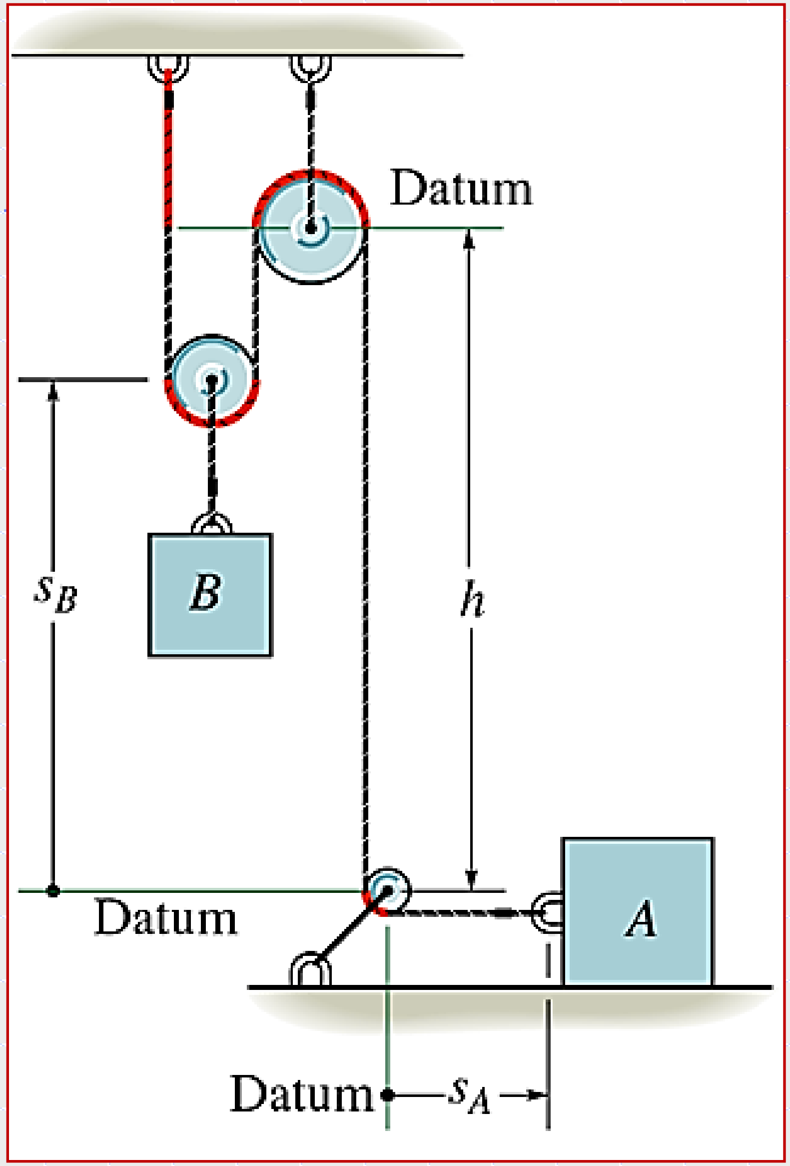
$$2a_B + a_A = 0$$

$$2v_B = -v_A$$

$$2a_B = -a_A$$



مثال :



$$s_A + h + 2(h - s_B) = c$$

$$s_A - 2s_B = c'$$

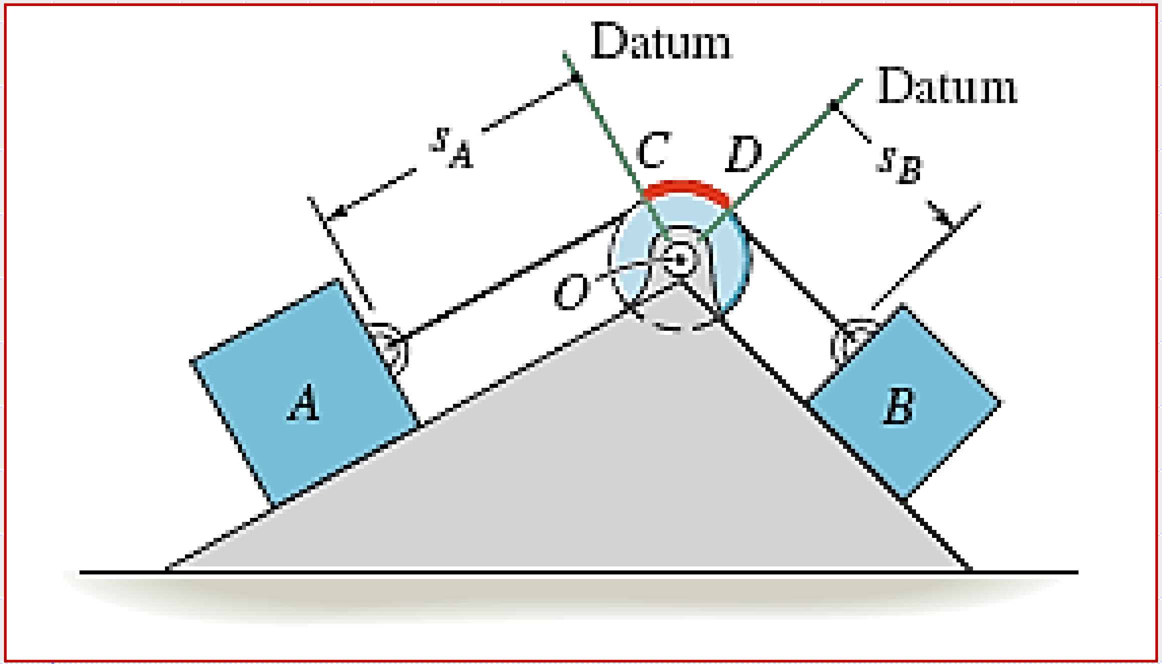
$$v_A - 2v_B = 0$$

$$a_A - 2a_B = 0$$

$$2v_B = v_A$$

$$2a_B = a_A$$

مثال :



$$s_A + l_{CD} + s_B = l_T$$

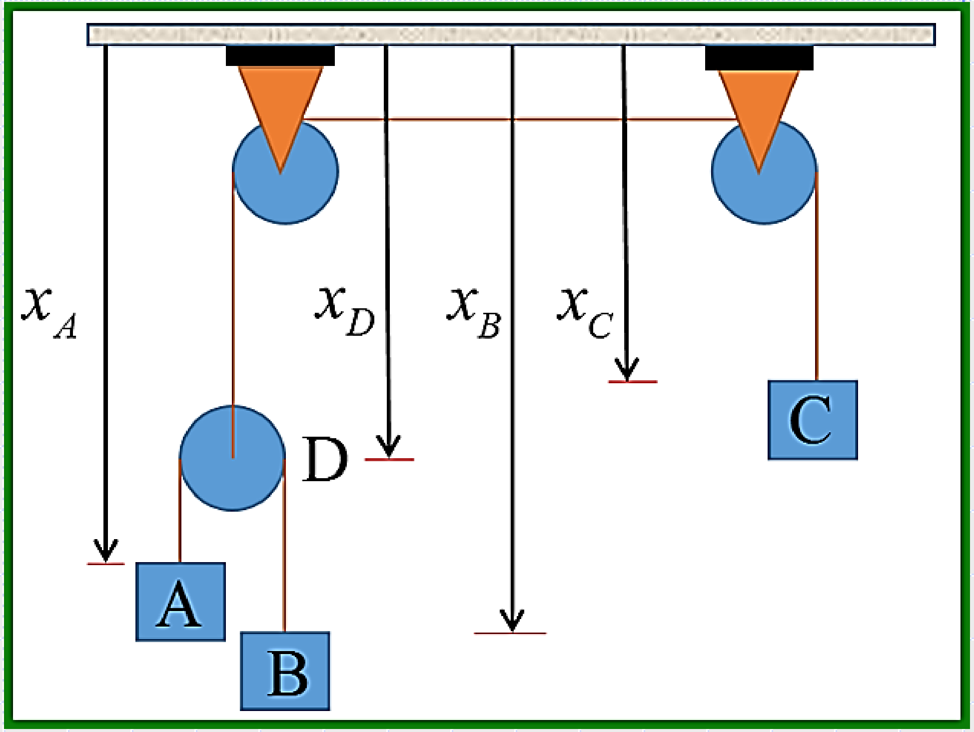
$$\frac{ds_A}{dt} + \frac{ds_B}{dt} = 0$$

$$v_B = -v_A$$

$$a_B = -a_A$$

مثال :

با توجه به ثابت بودن طول طناب ها خواهیم داشت:



$$(x_A - x_D) + (x_B - x_D) = c_1$$
$$x_A + x_B - 2x_D = c_1$$
$$x_D + x_C = c_2$$

$$v_A + v_B - 2v_D = 0 \;\;,\;\; v_D + v_C = 0$$

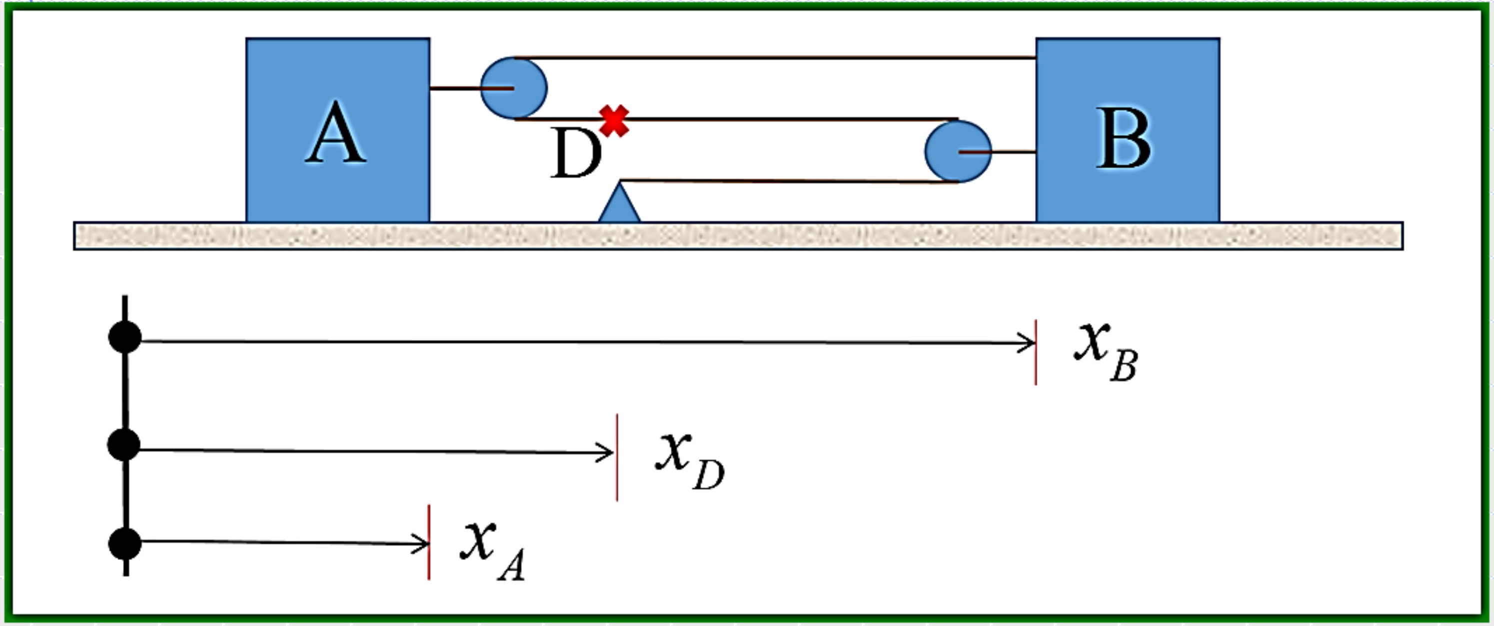
$$a_A + a_B - 2a_D = 0 \;\;,\;\; a_D + a_C = 0$$

مثال: اگر $v_B = 18\ {}^{m}\!/\!_{s}$ (ثابت و در جهت +X) مطلوبست:

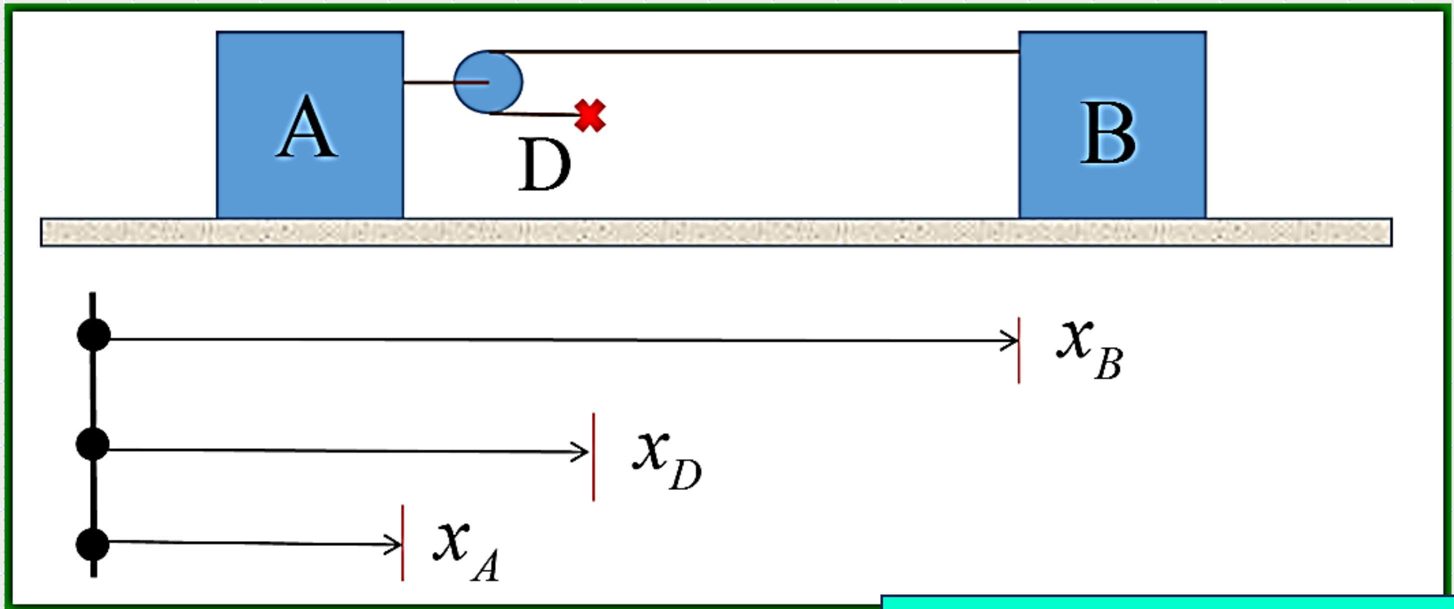
الف) سرعت بلوک **A**

ب) سرعت نقطه **D** کابل

ج) سرعت نسبی **A** نسبت به **B**



حل:



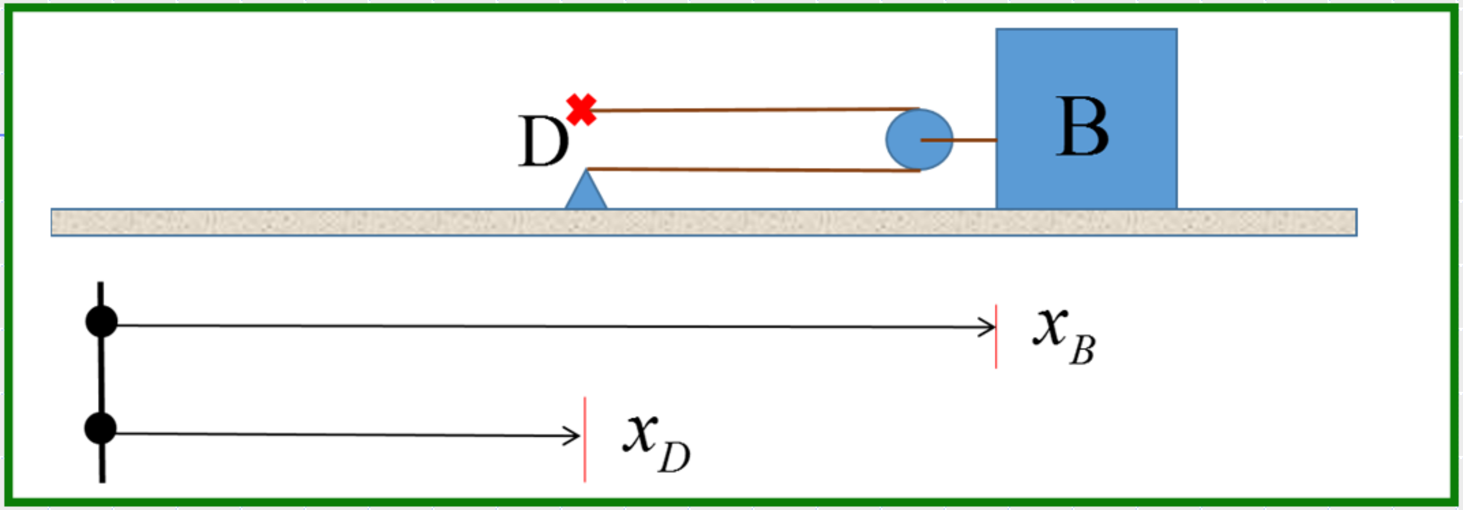
$$3x_B - 2x_A = c_1 \Longrightarrow$$
$$3v_B - 2v_A = 0$$

$$v_A = 1.5\,v_B = 1.5\,(18) = 27\ m/s$$
$$\Rightarrow v_A = 27\ m/s \ \rightarrow$$

$$(x_B - x_A) + (x_D - x_A) = c_2 \ , \quad x_B + x_D - 2x_A = c_2 \ ,$$
$$v_B + v_D - 2v_A = 0$$

$$18 + v_D - 2\,(27) = 0 \quad \Rightarrow \quad v_D = 36\ m/s \ \rightarrow$$

روش دیگر:



$$(X_B - X_D) + X_B = C_3$$

$$2X_B - X_D = C_3$$

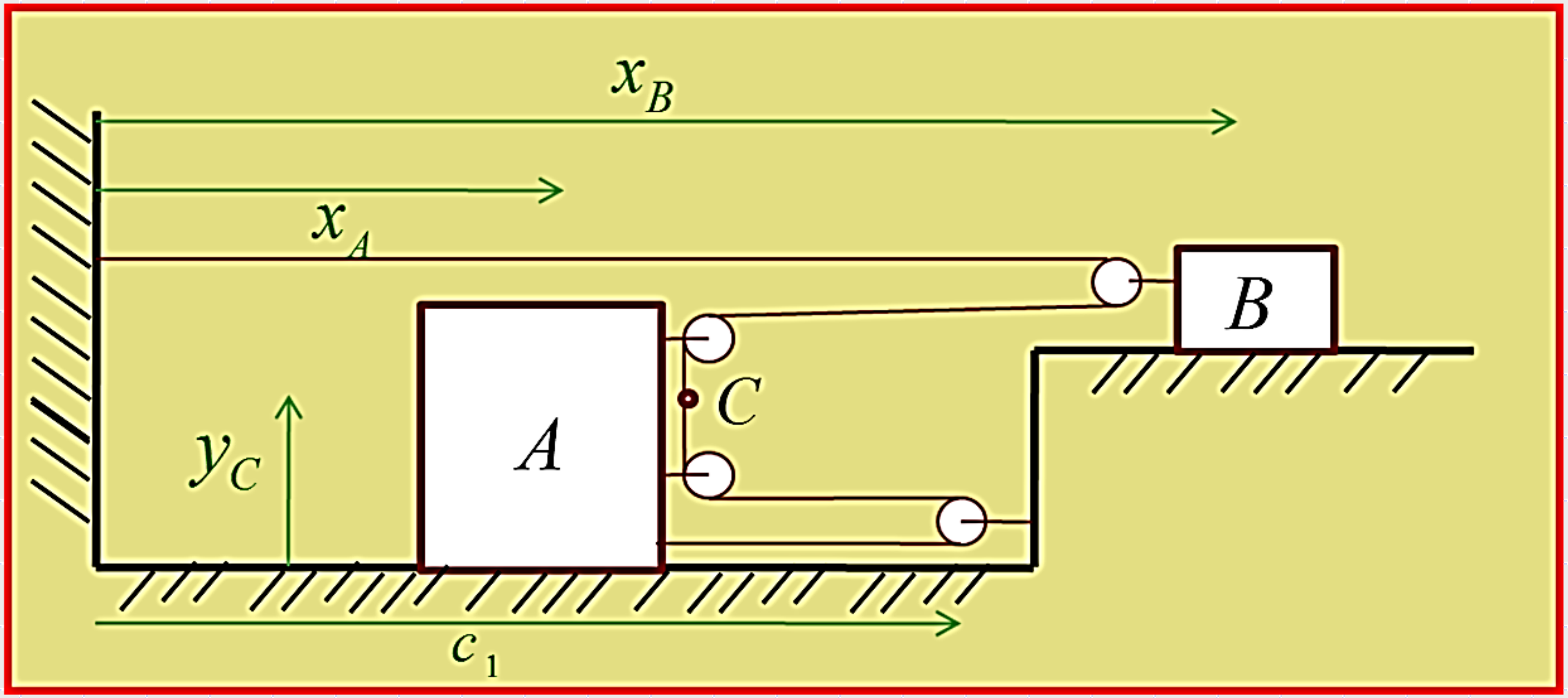
$$2V_B - V_D = 0 \Rightarrow \quad V_D = 2V_B = 36\ m/s \rightarrow$$

$$a_B = 300 \text{ mm/s}^2 \rightarrow \quad (cons.)$$

مثال:

در لحظه t=2 s :

$$v_A = ? \quad , \quad v_C = ?$$



$$\vec{a}_C = \vec{a}_A + \vec{a}_{C/A} = [a_A \rightarrow] + [a_{C/A} \uparrow]$$

$$= [a_{CX} \rightarrow] + [a_{CY} \uparrow]$$

$$\vec{v}_C = \vec{v}_A + \vec{v}_{C/A} = [v_A \rightarrow] + [v_{C/A} \uparrow]$$

$$= [v_{CX} \rightarrow] + [v_{CY} \uparrow]$$

$$x_B + (x_B - x_A) + 2(c_1 - x_A) = c$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x_B - 3x_A = c \\ 2v_B - 3v_A = 0 \\ 2a_B - 3a_A = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{a_B = 300}$$

$$\Rightarrow \quad a_A = 200 \text{ mm/s}^2 \rightarrow$$

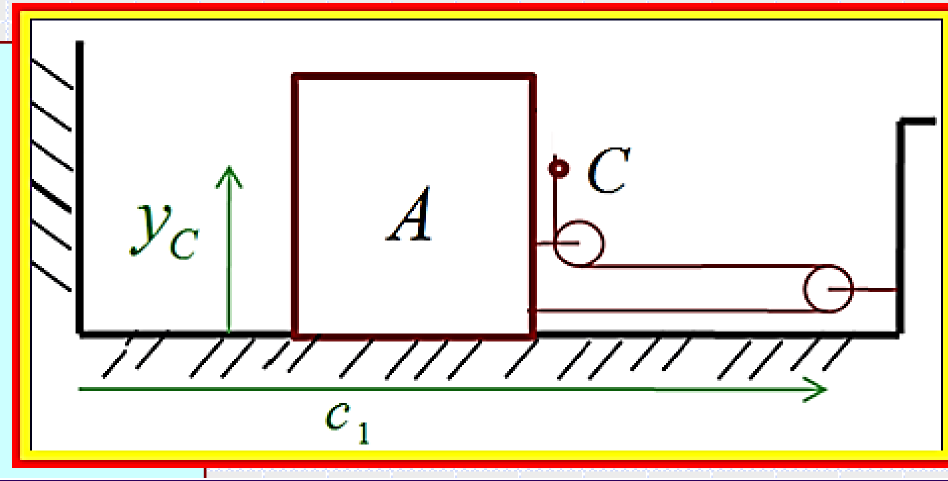
$$\Rightarrow \quad v_A(t=2) = a_A \, t = 200\,(2) = 400 \text{ mm/s} \rightarrow$$

$$2(c_1 - x_A) + y_C = c$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_C - 2x_A = c \\ v_{CY} - 2v_A = 0 \\ a_{CY} - 2a_A = 0 \end{cases}$$

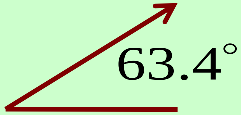
$$\Rightarrow \quad \mathrm{a_{CY}} = 400\ \mathrm{mm/s^2} \uparrow \ = \mathrm{a_{C/A}}$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{v_{CY}} = 400(2)\ \mathrm{mm/s} \uparrow = \mathrm{v_{C/A}}$$



$$\Rightarrow \quad \vec{\mathrm{v}}_{\mathrm{C}} = [400\ \mathrm{mm/s} \rightarrow] + [800\ \mathrm{mm/s} \uparrow]$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{v_C} = 400\sqrt{5} = 894\ \mathrm{mm/s}$$

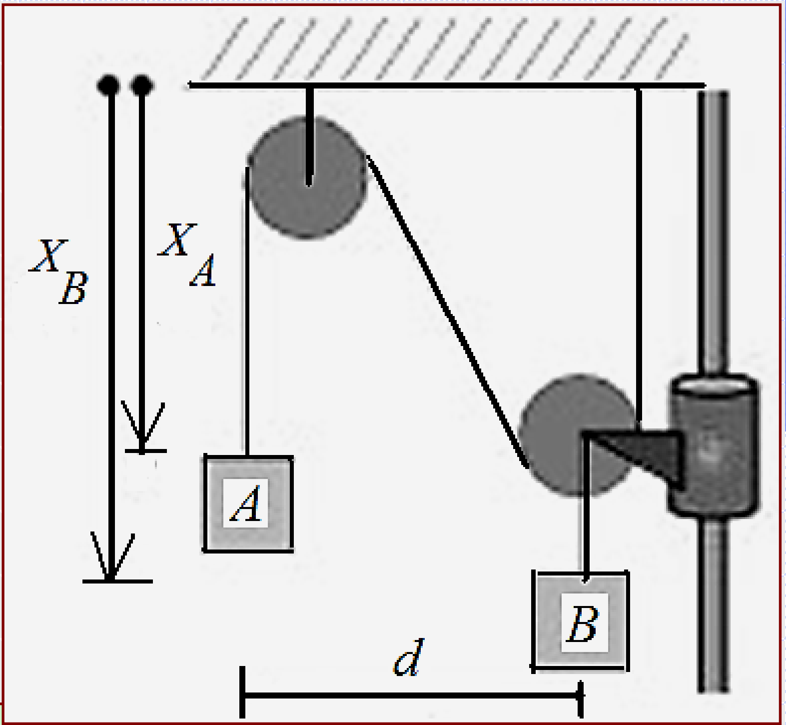


مثال :

L = ثابت

$$L = x_A + \sqrt{d^2 + x_B^2} + x_B$$

$$L = cons. \Rightarrow \dot{L} = 0 \Rightarrow \ddot{L} = 0$$



$$\dot{L} = 0 \Rightarrow \dot{X}_A + \frac{1}{2}(d^2 + X_B^2)^{-\frac{1}{2}}(2x_B)\dot{X}_B + \dot{X}_B = 0$$

$$v_A + v_B\left[\frac{x_B}{\sqrt{x_B^2 + d^2}} + 1\right] = 0$$

$$\ddot{L} = 0 \Rightarrow \ddot{X}_A + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

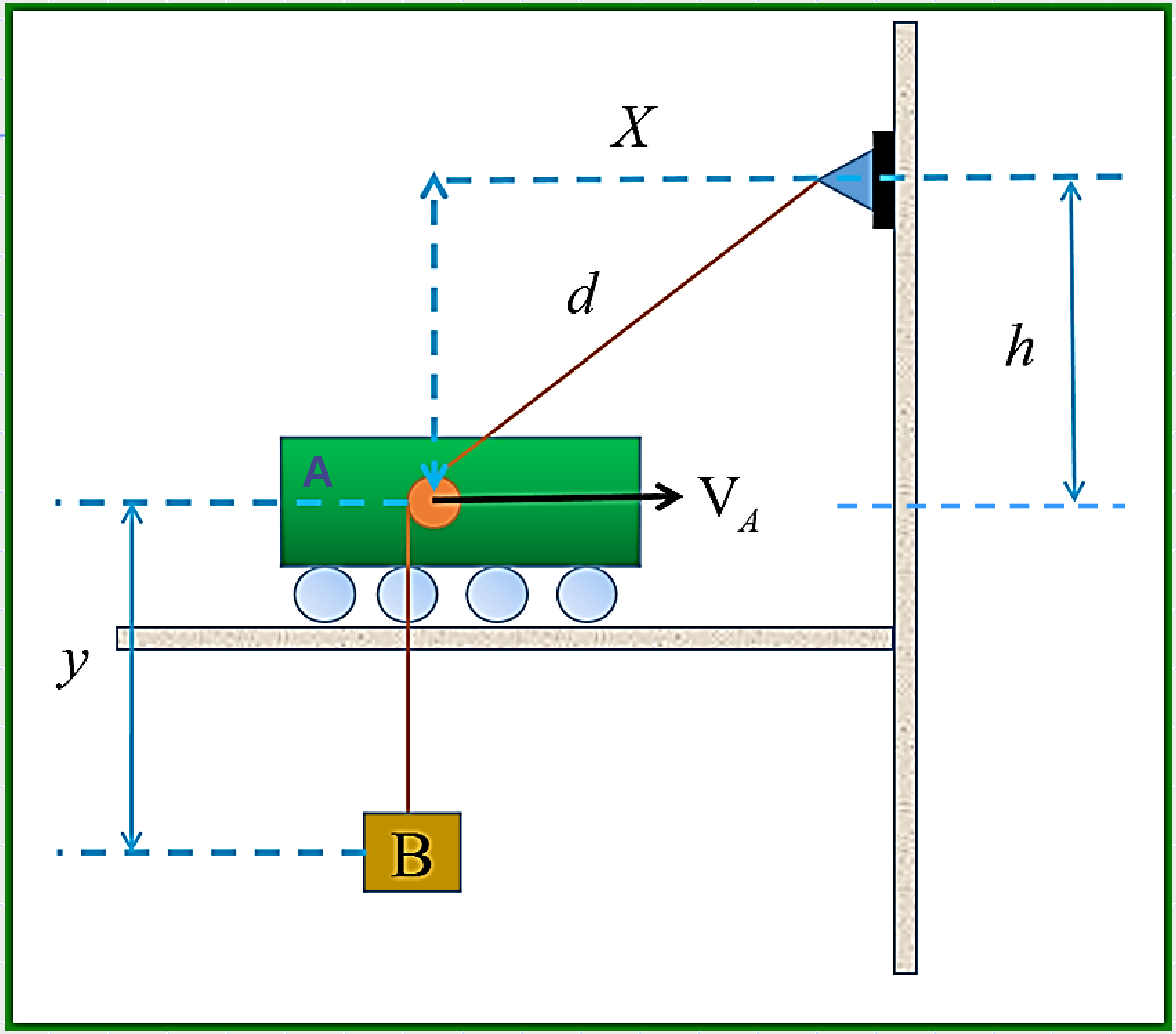
$$\dot{X}_A = v_A$$

$$\dot{X}_B = v_B$$

$$\ddot{X}_A = a_A$$

$$\ddot{X}_B = a_B$$

مثال: مطلوبست سرعت متحرک B (بصورت تابعی از سرعت A)



$V_B = ?$

حل:

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{B/A}$$

$$\vec{V}_B = [V_A \rightarrow] + \left[V_{B/A} \downarrow\right] \Rightarrow V_B = \sqrt{V_A^2 + V_{B/A}^2}$$

$$L = d + y = cons. \Rightarrow \dot{L} = \dot{d} + \dot{y} = 0$$

$$|\dot{y}| = \left|V_{B/A}\right| = \left|\dot{d}\right| \qquad d = \sqrt{h^2 + x^2} \Rightarrow d^2 = h^2 + x^2 \Rightarrow 2d\dot{d} = 0 + 2x\dot{x}$$

$$\dot{d} = \dot{x}\frac{x}{d} = V_{B/A}$$

$$V_B = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{d}^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \left(\frac{x\dot{x}}{d}\right)^2} = \dot{x}\sqrt{1 + \left(\frac{x}{d}\right)^2} = V_A\sqrt{\frac{2x^2 + h^2}{x^2 + h^2}}$$

راه حل دوم:

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{B/A}$$

$$\vec{V}_B = [V_A \rightarrow] + \left[V_{B/A} \downarrow\right]$$

$$L = d + y = cons. \quad \Rightarrow \quad L = \sqrt{h^2 + x^2} + y = c$$

$$\dot{L} = \dot{d} + \dot{y} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\left(\sqrt{h^2 + x^2}\right)^{(-0.5)}\left(2x\dot{x}\right) + \dot{y} = 0$$

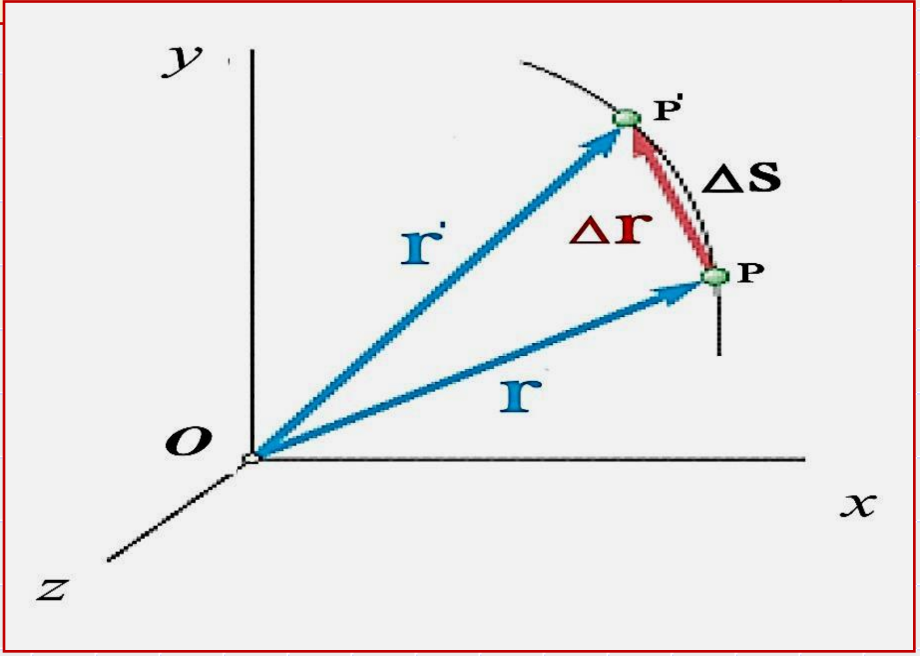
$$|\dot{x}| = |V_A| \quad , \quad |\dot{y}| = |V_{B/A}|$$

$$|\dot{y}| = \left|\frac{x\dot{x}}{\sqrt{x^2 + h^2}}\right| = \left|\frac{xV_A}{\sqrt{x^2 + h^2}}\right|$$

(curvilinear Motion) حرکت منحنی الخط:

وقتی یک نقطه مادی در یک صفحه در امتداد خط منحنی به غیر از خط مستقیم حرکت نماید، نقطه مادی حرکت منحنی الخط دارد . برای تعیین وضعیت سینماتیک نقطه **P** باید دستگاه مختصات ثابتی را انتخاب نمود و وضع حرکت آن نقطه متحرک را نسبت به آن دستگاه سنجید.

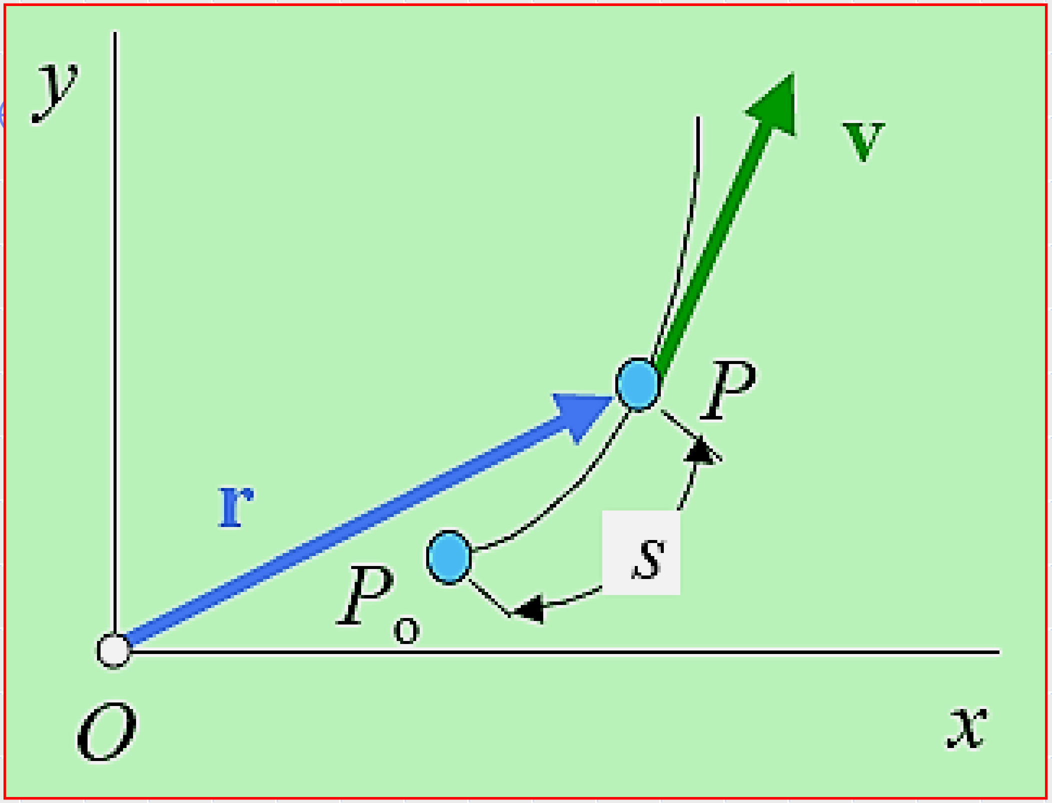
سرعت متوسط $\vec{v} = \dfrac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$



سرعت لحظه ای

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\Rightarrow \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \,,\; v = \frac{ds}{dt}$$



$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

$$v = \frac{ds}{dt}$$

$$\boxed{\frac{d\vec{r}}{dt} = \left(\frac{d\vec{r}}{ds}\right)\left(\frac{ds}{dt}\right)}$$

$$\boxed{\vec{v} = \left(\frac{ds}{dt}\right)\left(\frac{d\vec{r}}{ds}\right) \Rightarrow \vec{v} = \left(\frac{ds}{dt}\right)\vec{e}_t}$$

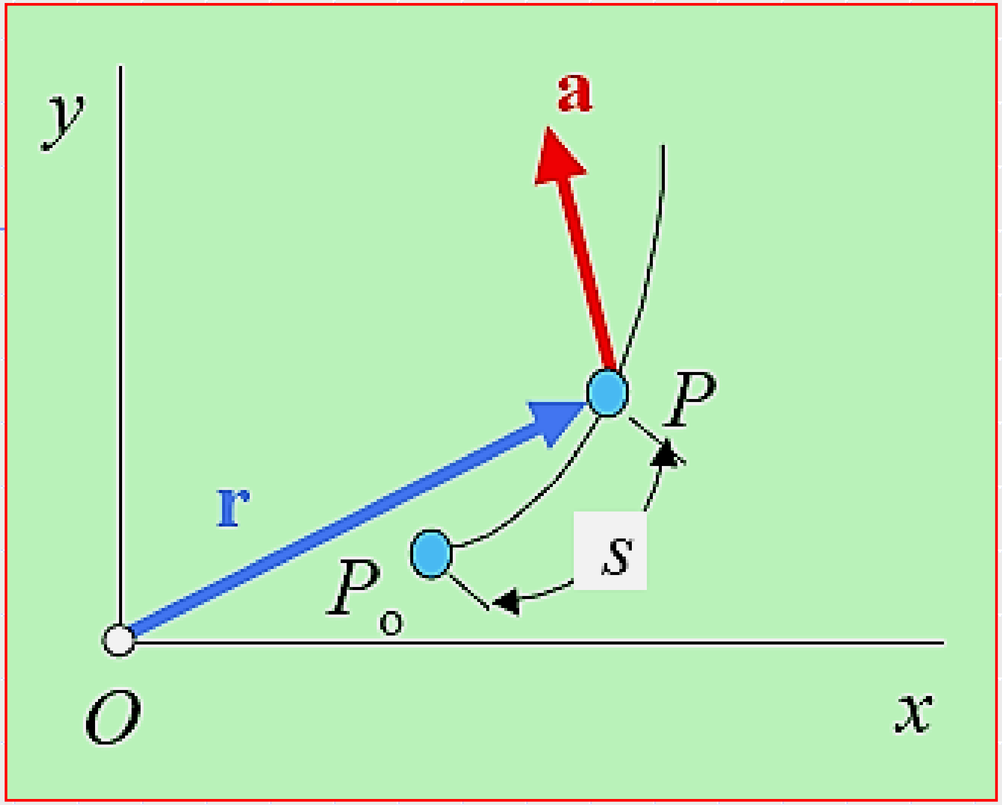
$\Rightarrow \vec{v} = v\vec{e}_t$ $\qquad$ $\vec{e}_t =$ بردار واحد مماس بر مسیر حرکت

شتاب متوسط : $\bar{\vec{a}} = \dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$

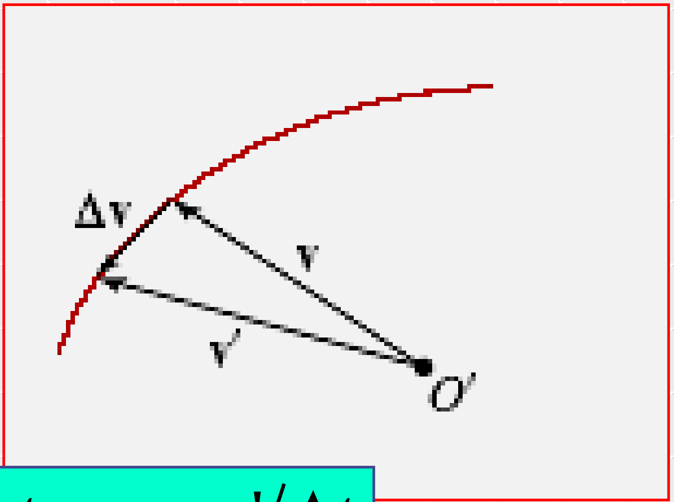
شتاب لحظه ای : $\vec{a} = \lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}$

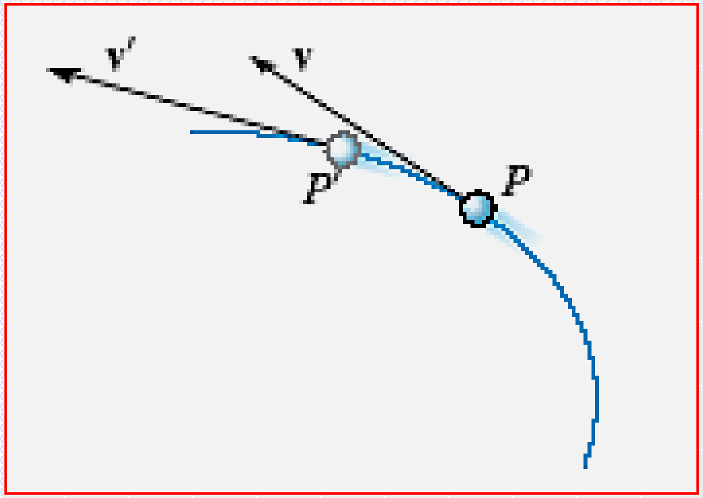
$\vec{r}$: بردار موقعیت $\qquad$ $\dfrac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$: سرعت نقطه

$\dfrac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}$: شتاب نقطه



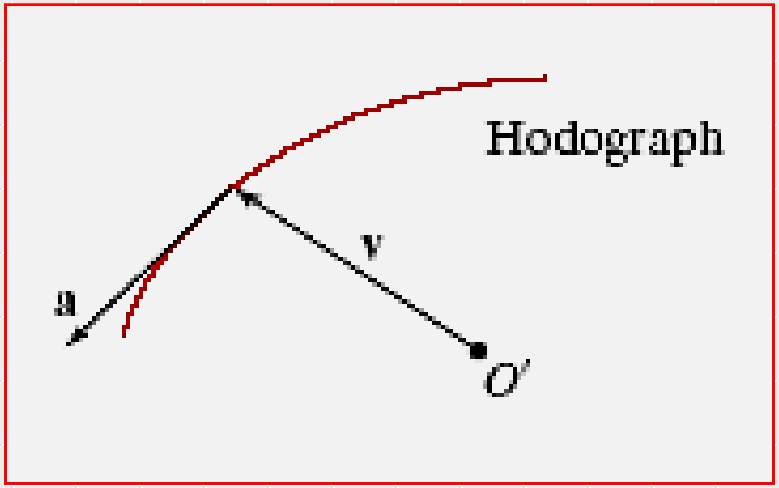
$$a = \frac{dv}{dt}$$





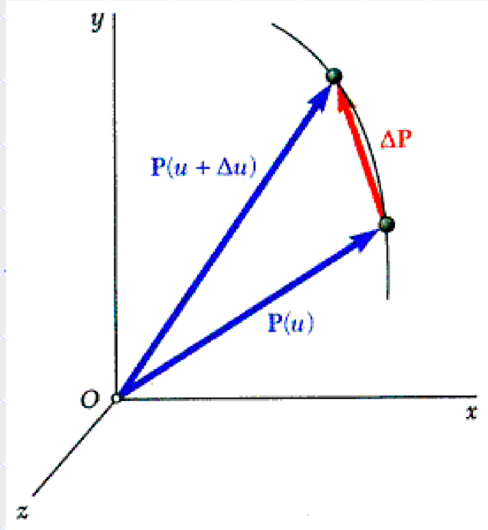
$$a_{Avg} = \Delta v / \Delta t = v - v' / \Delta t$$

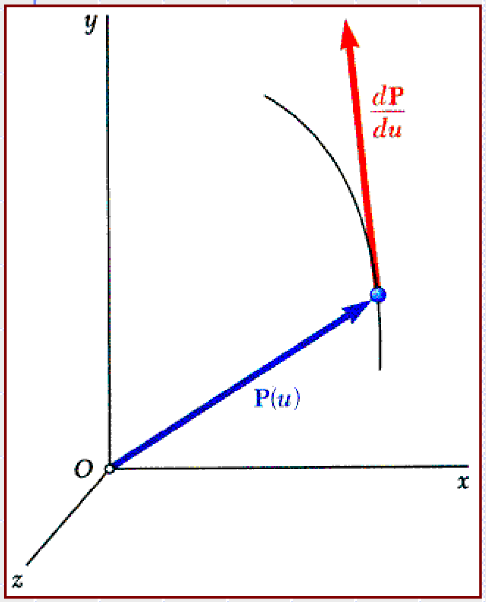
$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 r}{dt^2}$$



هدوگراف منحنی ترسیم شده از نوک بردارهای سرعت.

بردار سرعت همیشه مماس بر منحنی مسیر و شتاب مماس بر منحنی هدوگراف





- Let $\vec{P}(u)$ be a vector function of scalar variable u,

$$\frac{d\vec{P}}{du} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta \vec{P}}{\Delta u} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\vec{P}(u+\Delta u) - \vec{P}(u)}{\Delta u}$$

- Derivative of vector sum,

$$\frac{d\left(\vec{P}+\vec{Q}\right)}{du} = \frac{d\vec{P}}{du} + \frac{d\vec{Q}}{du}$$

- Derivative of product of scalar and vector functions,

$$\frac{d\left(f\vec{P}\right)}{du} = \frac{df}{du}\vec{P} + f\frac{d\vec{P}}{du}$$

- Derivative of *scalar product* and *vector product*,

$$\frac{d\left(\vec{P}\bullet\vec{Q}\right)}{du} = \frac{d\vec{P}}{du}\bullet\vec{Q} + \vec{P}\bullet\frac{d\vec{Q}}{du}$$

$$\frac{d\left(\vec{P}\times\vec{Q}\right)}{du} = \frac{d\vec{P}}{du}\times\vec{Q} + \vec{P}\times\frac{d\vec{Q}}{du}$$

مولفه های متعامد سرعت و شتاب

(Rectangular Cartisian Components)

$$\vec{r}=\vec{r}(t)=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$$

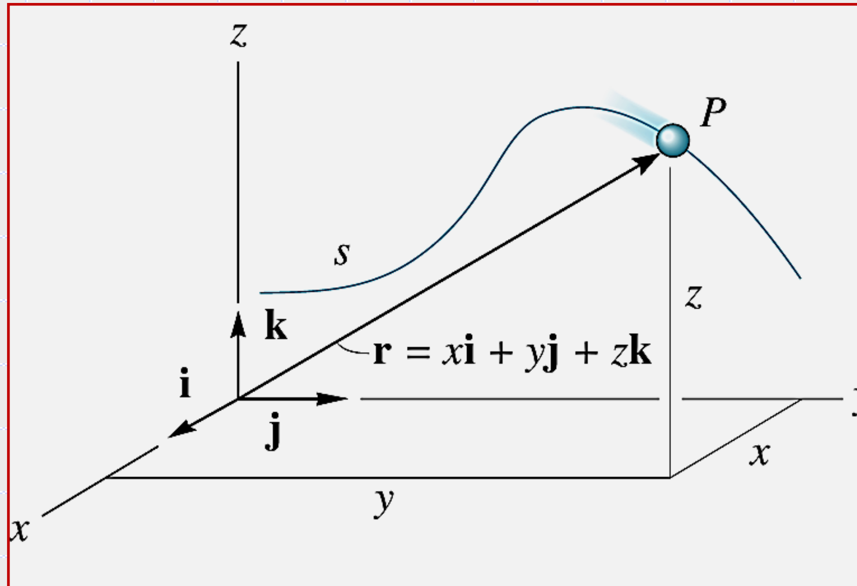
$$x=x(t),\quad y=y(t),\quad z=z(t)$$

$$\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{d}{dt}(x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k})$$

$$=\frac{dx}{dt}\hat{i}+\frac{dy}{dt}\hat{j}+\frac{dz}{dt}\hat{k}$$

$$=\dot{x}\hat{i}+\dot{y}\hat{j}+\dot{z}\hat{k}$$

$$=v_x\hat{i}+v_y\hat{j}+v_z\hat{k}$$



Position

$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}$$

$$v_x = \dot{x} \quad v_y = \dot{y} \quad v_z = \dot{z}$$

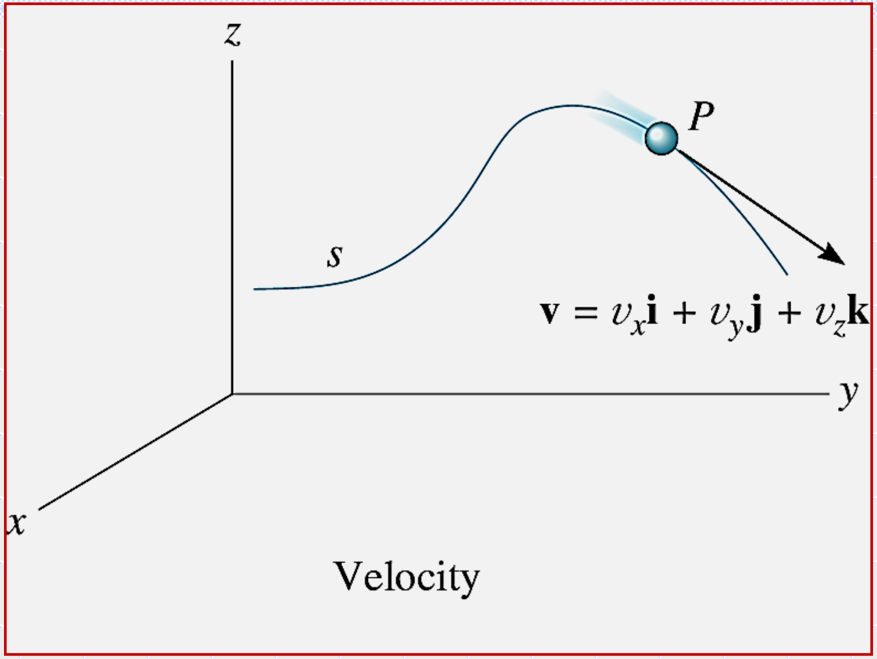
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k})$$

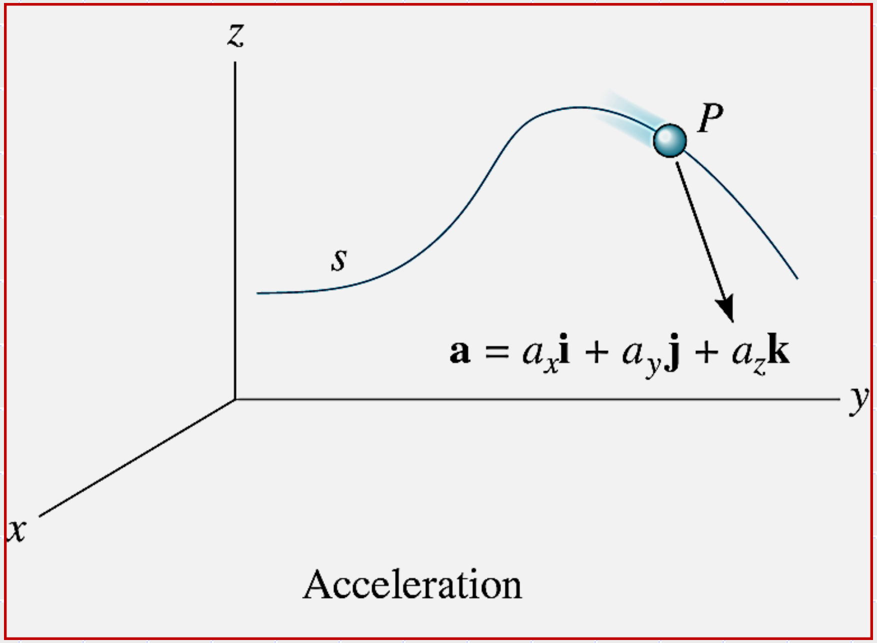
$$= \frac{dv_x}{dt}\hat{i} + \frac{dv_y}{dt}\hat{j} + \frac{dv_z}{dt}\hat{k}$$

$$= \dot{v}_x\hat{i} + \dot{v}_y\hat{j} + \dot{v}_z\hat{k}$$

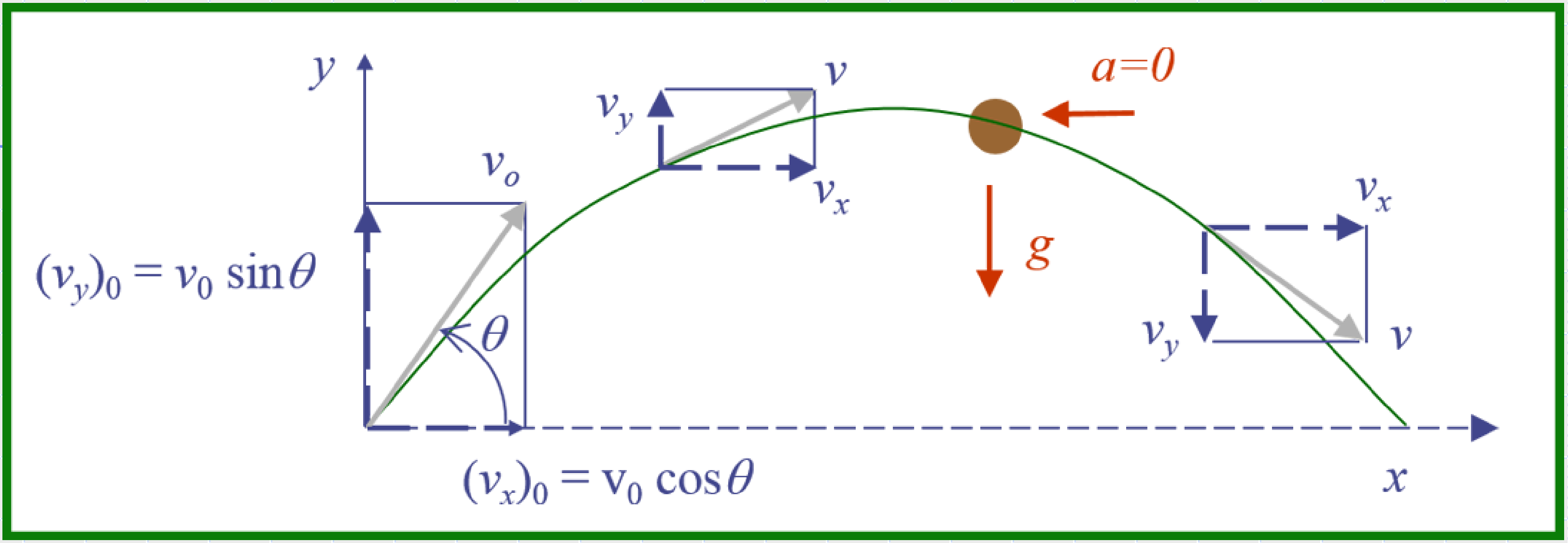
$$= \ddot{x}\hat{i} + \ddot{y}\hat{j} + \ddot{z}\hat{k}$$

$$\boxed{a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}$$





حرکت پرتابی (Projectile Motion)



x-axis

$$v_x = (v_x)_o$$

$$\boxed{x = x_o + (v_x)_o t}$$

y-axis

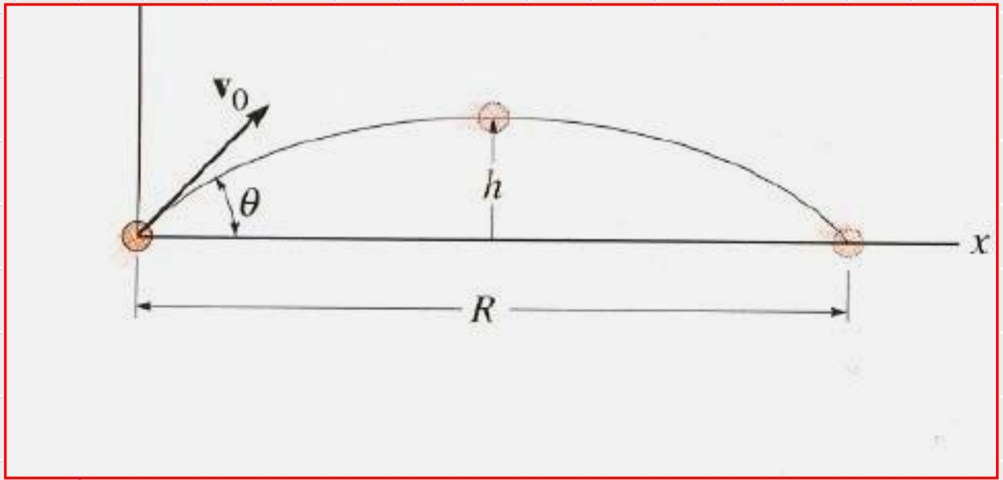
$$v_y = (v_y)_o - gt$$

$$\boxed{y = y_o + (v_y)_o t - \frac{1}{2} g t^2}$$

$$v_y^2 = (v_y)_o^2 - 2g(y - y_o)$$

حذف t

$$\boxed{y - y_o = (\tan\theta)(x - x_o) - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2\theta}(x - x_o)^2}$$



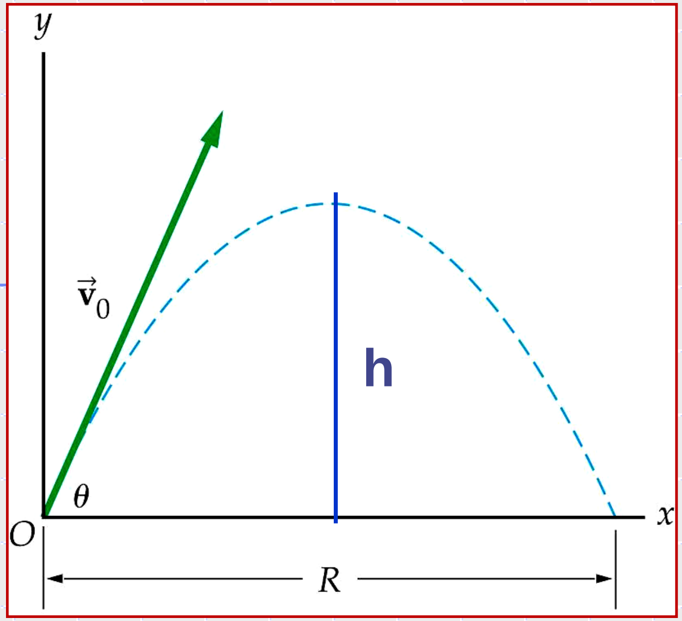
اگر
$x_0 = 0$ و $y_0 = 0$

$$v_{x_0} = v_0 \cos\theta \quad , \quad v_{y_0} = v_0 \sin\theta$$

$$x = (v_0 \cos\theta)t \quad , \quad y = (v_0 \sin\theta)t - \frac{1}{2}gt^2$$

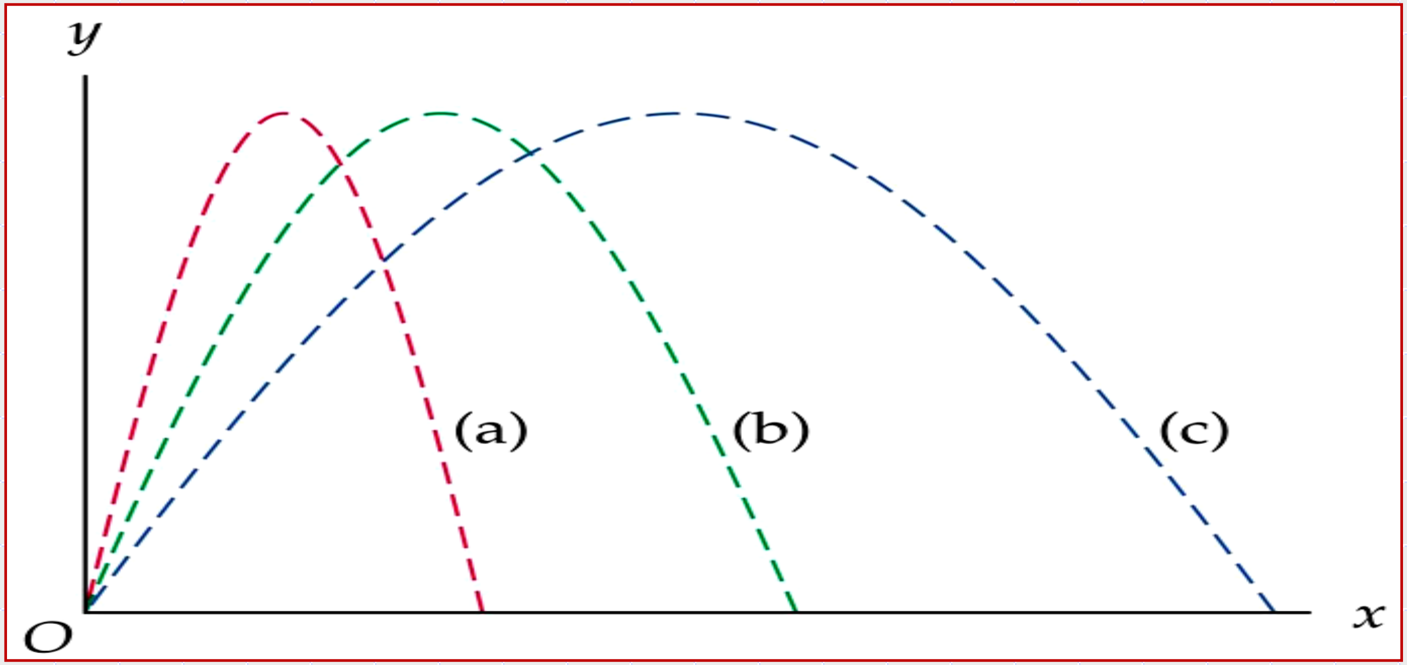
$$y = (v_0 \sin\theta)\left(\frac{x}{v_0 \cos\theta}\right) - \left(\frac{g}{2}\right)\left(\frac{x}{v_0 \cos\theta}\right)^2$$

$$\boxed{y = (x \tan\theta) - \left(\frac{g x^2}{2v_0^2}\right)\left(1 + \tan^2\theta\right)}$$

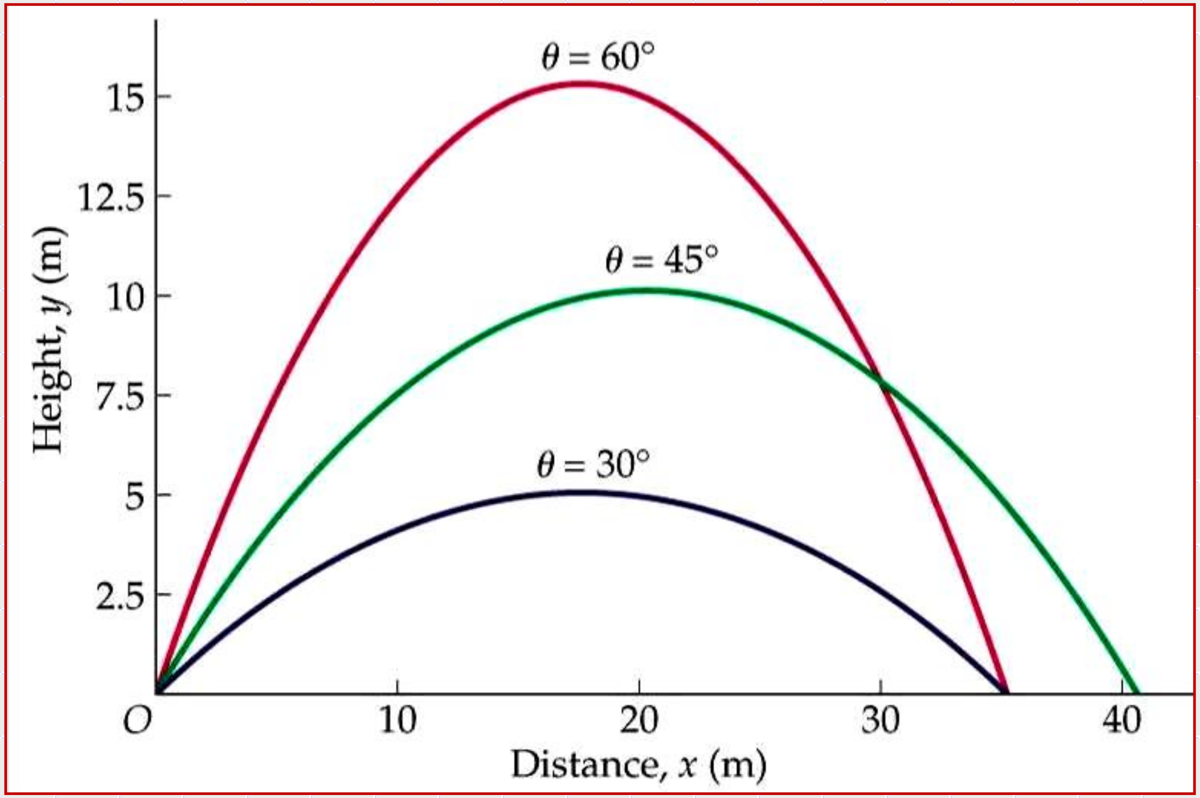


$$\boxed{R = \left(\frac{v_0{}^2}{g}\right)\sin 2\theta}$$

$$h = \frac{v_o^2 \sin^2\theta}{2g}$$

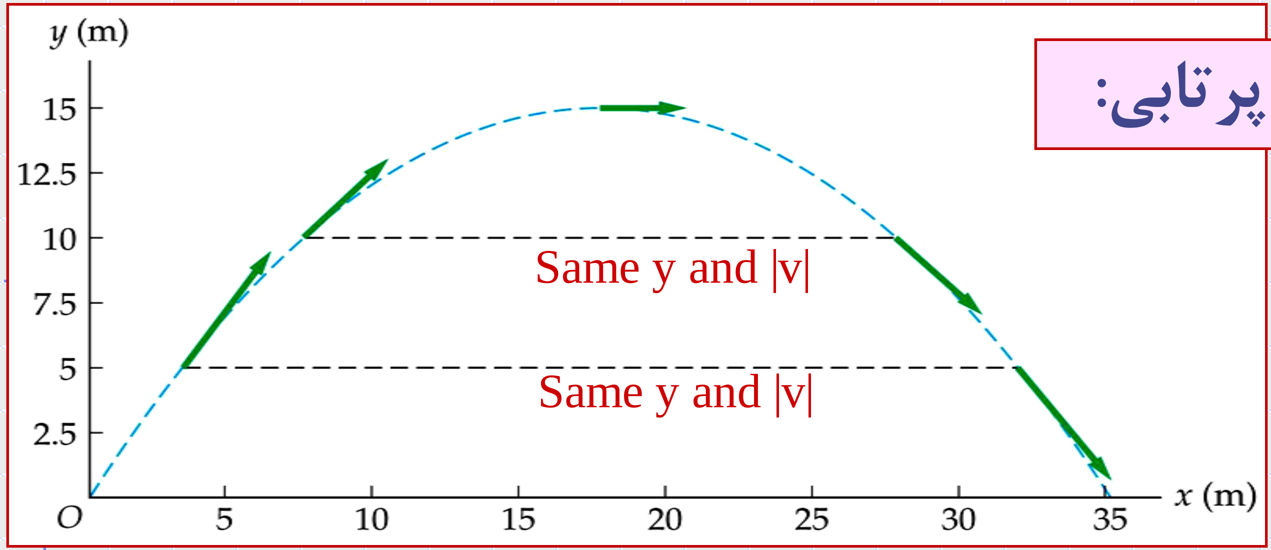


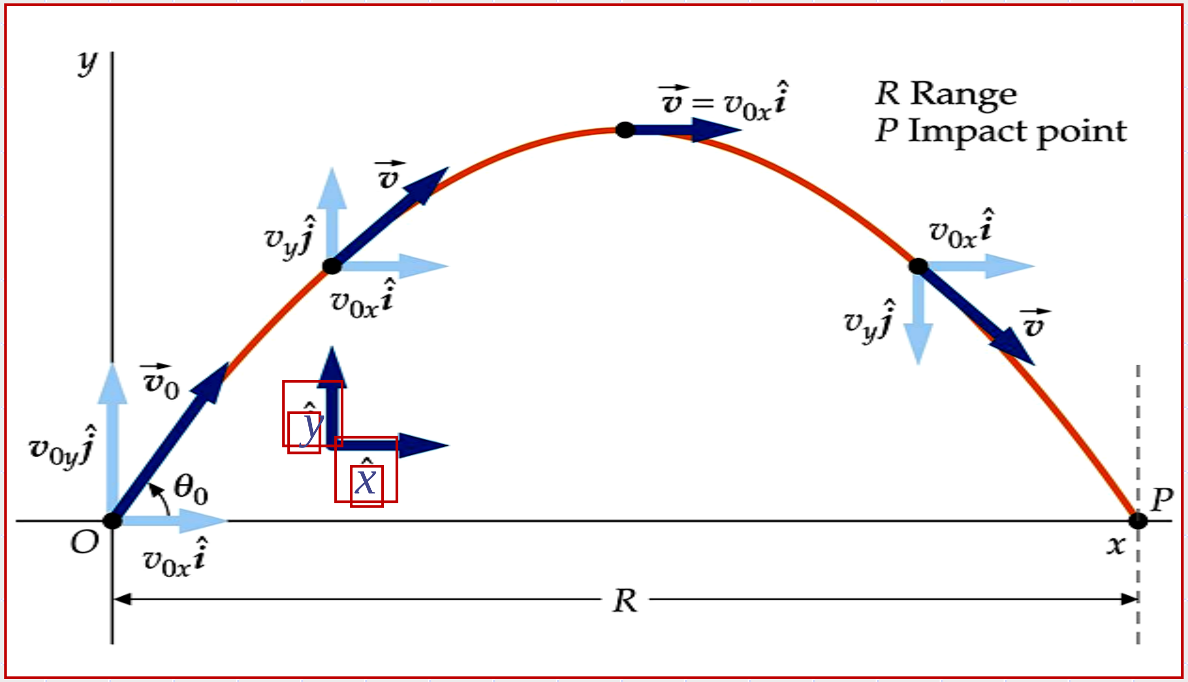
The range is a maximum when θ = 45°:



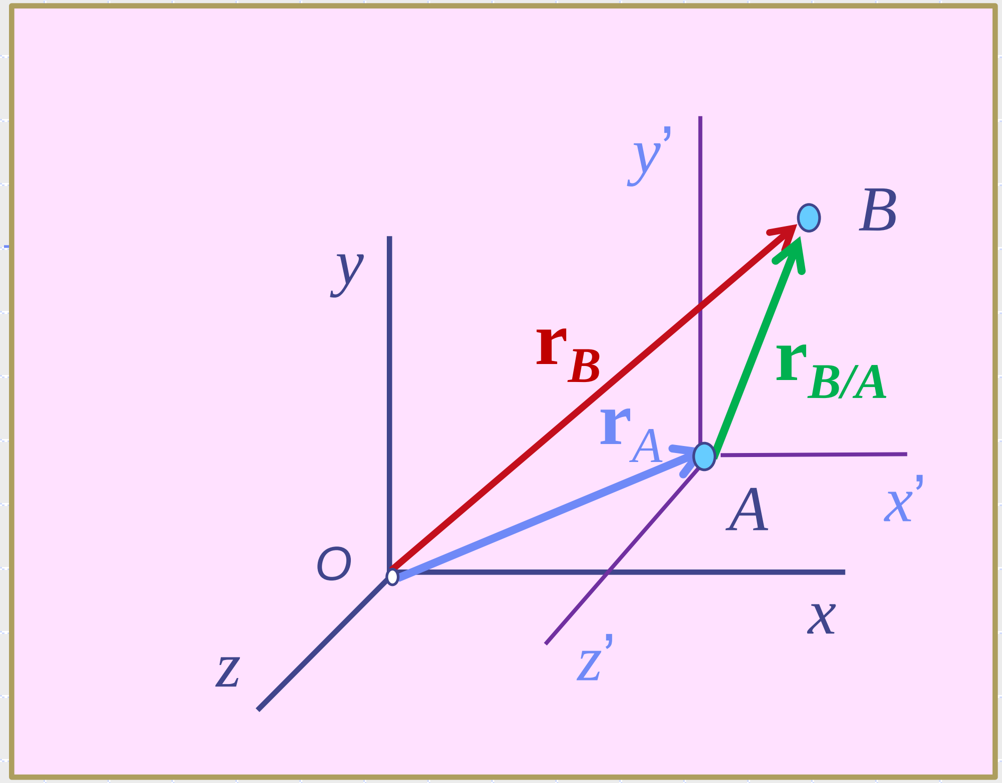
$$R_{\max} = \frac{{v_0}^2}{g}$$

تقارن در حرکت پرتابی:





حرکت نسبی :
(Relative Motion)



$r_A = A$ موقعیت نقطه

$r_B = B$ موقعیت نقطه

$r_{B/A} = A$ موقعیت نسبی نقطه B نسبت به نقطه

$$\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_{B/A}$$

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A}$$

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A}$$

نکته: دستگاه مختصات XY ثابت است و
دستگاه مختصات X′Y′ متحرک و موازی با دستگاه مختصات ثابت

سرعت نسبی نقطه B نسبت به A:

$$\frac{d}{dt}(\vec{r}_{B/A}) = \frac{d}{dt}(\vec{r}_B) - \frac{d}{dt}(\vec{r}_A) \Rightarrow \vec{v}_{B/A} = \vec{v}_B - \vec{v}_A$$

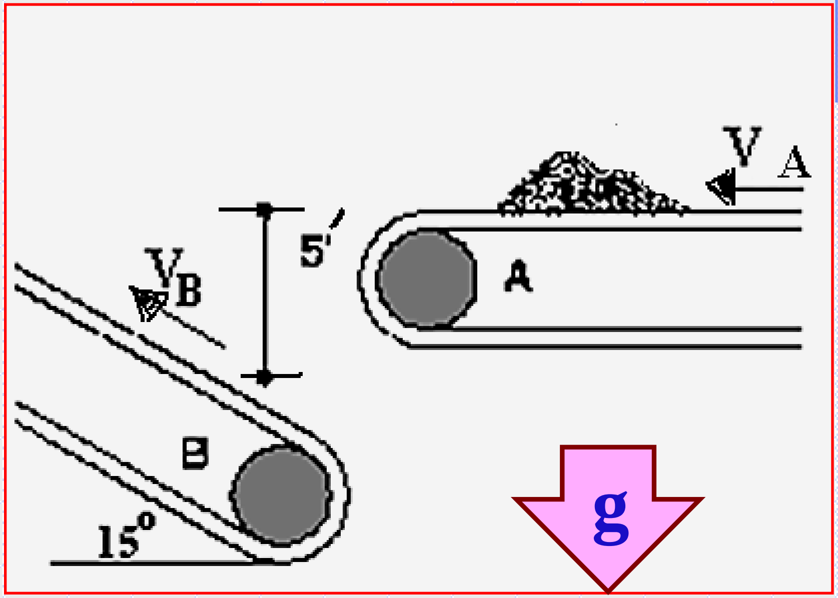
شتاب نسبی نقطه B نسبت به A:

$$\frac{d}{dt}(\vec{v}_{B/A}) = \frac{d}{dt}(\vec{v}_B) - \frac{d}{dt}(\vec{v}_A) \Rightarrow \vec{a}_{B/A} = \vec{a}_B - \vec{a}_A$$

مثال: مطلوبست سرعت نسبی مصالح شن و ماسه نسبت به سرعت تسمه B.

$$v_A = 6\ ft/s \leftarrow \ , \quad v_B = 8\ ft/s \nwarrow$$

($\mathbf{V_{S/B}}$ به هنگام ریختن روی تسمه)



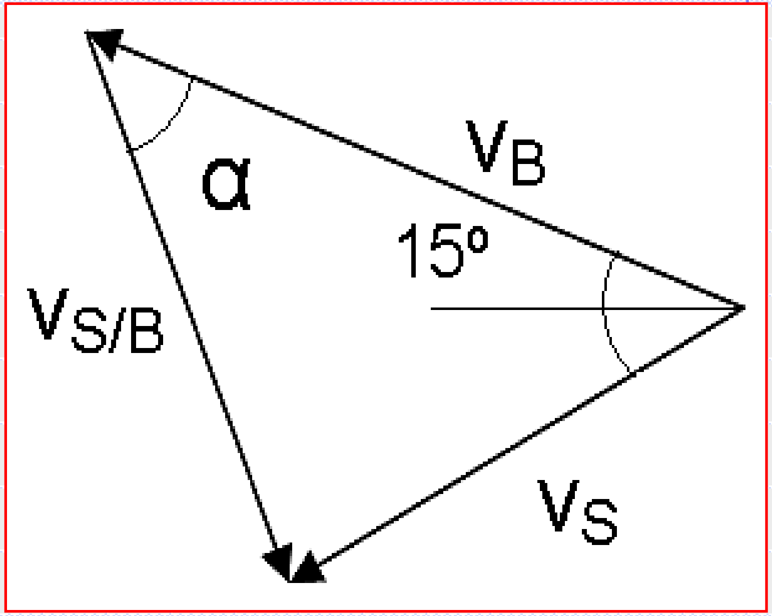
$$\vec{v}_{S/B} = \vec{v}_S - \vec{v}_B$$

$$\vec{v}_S = \vec{v}_{sx} + \vec{v}_{sy}$$
$$= \left[v_A \leftarrow \right] + \left[v_{sy} \downarrow \right]$$

$$v_{sy} = \sqrt{2g(5)} = \sqrt{2(32.2)(5)} = 17.94\ ft/s \downarrow$$

$$\vec{v}_S = [6\leftarrow]+[17.94\downarrow]$$

$$\vec{v}_S = 18.92 \ \text{ft/s} \ \swarrow$$

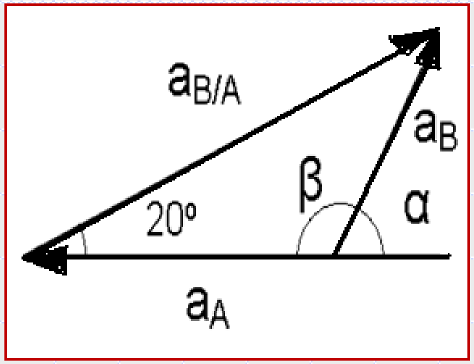


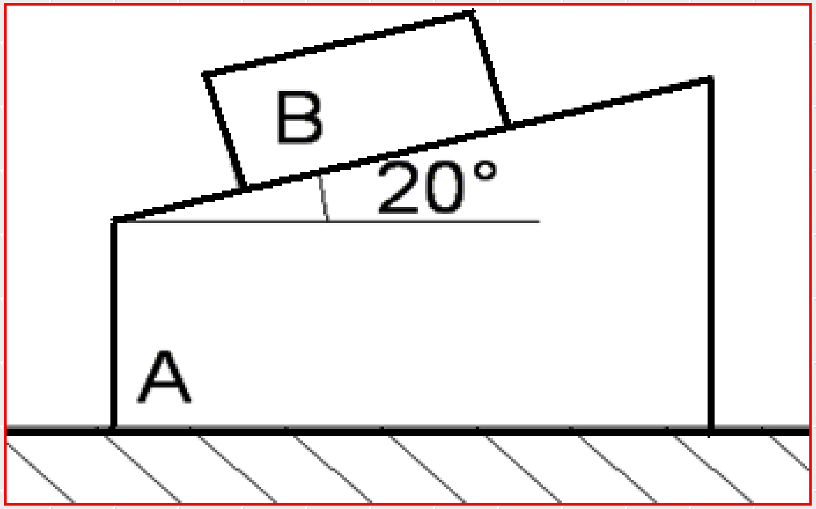
$$v_{S/B} = \sqrt{v_B^2 + v_S^2 - 2v_B v_S \cos(86.5)} = 20.01 \ ft/s$$

$$\frac{Sin(\alpha)^\circ}{18.92} = \frac{Sin(15+71.5)^\circ}{20.01} \Rightarrow \alpha = 70.69^\circ$$

مثال: بلوک **A** با شتاب ثابت $80\ {mm}/{s^2}$ (به سمت چپ) در حال حرکت است. و بلوک **B** با شتاب نسبی ثابت $120\ {mm}/{s^2}$ (به بالا) روی بلوک **A** در حال حرکت است. مطلوبست شتاب مطلق **B**.

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{B/A}$$





$$\vec{a}_B = \sqrt{120^2 + 80^2 - 2(120)(80)(\cos 20)}$$

$$a_B = 52.5\ {mm}/{s^2} \qquad \frac{\sin\beta}{120} = \frac{\sin 20^\circ}{52.5}$$

$$\Rightarrow \beta = 128.6^\circ \quad \alpha = 51.4^\circ$$

مولفه‌های مماسی و عمودی:

(Normal and Tangential Components)

$\vec{e}_t$ = بردار واحد مماسی

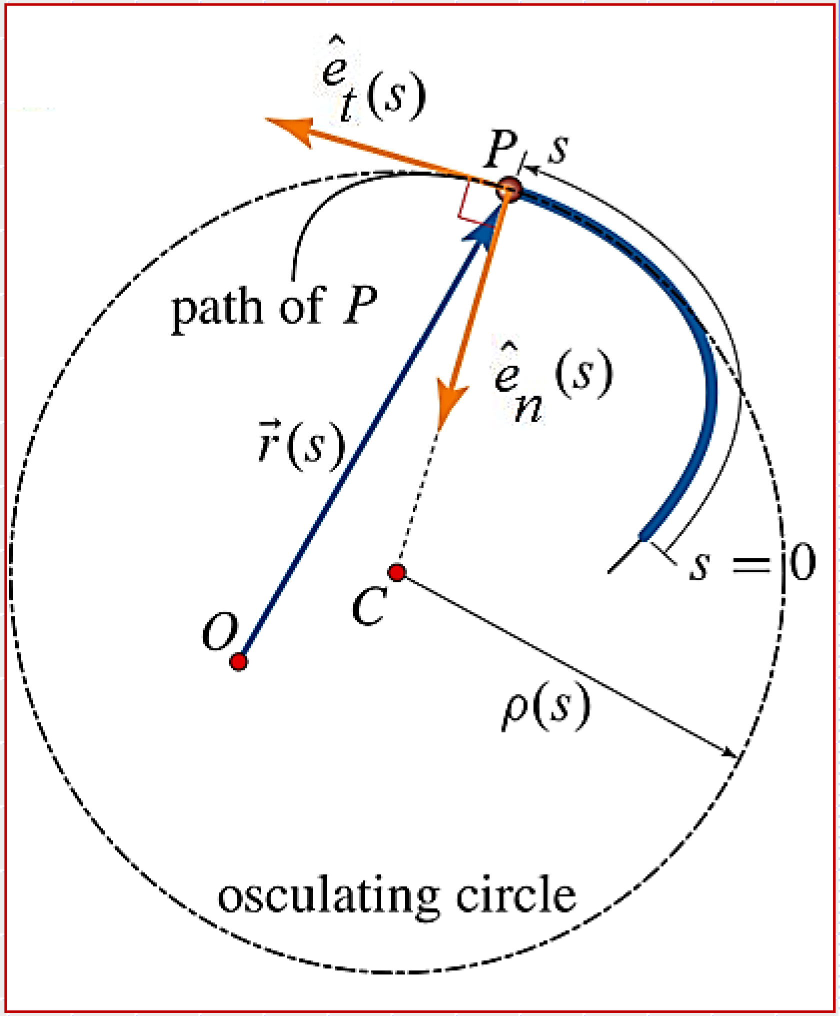
$\vec{e}_n$ = بردار واحد عمودی

$$\vec{r}=\vec{r}(t) \quad , \quad \vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt} \quad , \quad \vec{v}=v\vec{e}_t$$

$$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d\left(v\vec{e}_t\right)}{dt}=\frac{dv}{dt}\vec{e}_t+v\frac{d\vec{e}_t}{dt}$$

$$\vec{a}=a_t\vec{e}_t+a_n\vec{e}_n$$

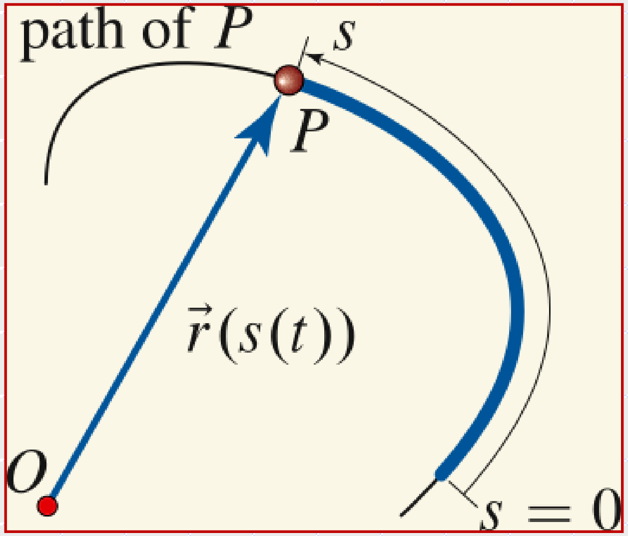
$$a_t=\frac{dv}{dt}$$



r = موقعیت نقطه مادی

S = مسافت طی شده روی مسیر منحنی

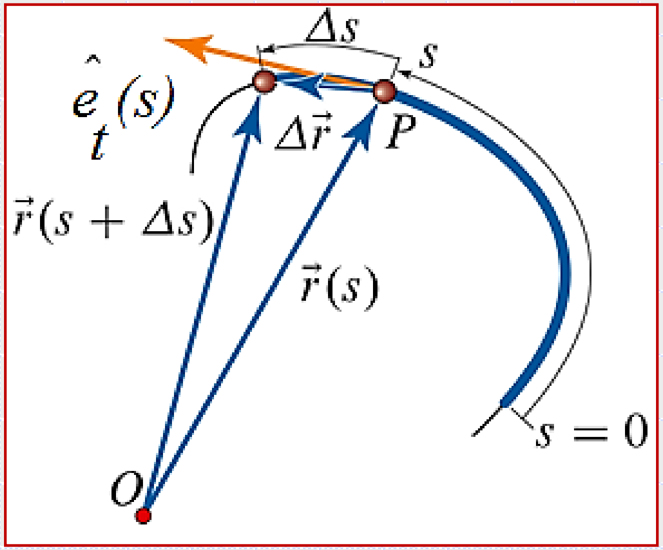
κ (S) = خمیدگی مسیر =*Curvature*



$$\vec{r} = \vec{r}(s(t))$$

$$\hat{e}_t(s) = \frac{d\vec{r}(s)}{ds}$$

$$\kappa(s) = \left|\frac{d\hat{e}_t(s)}{ds}\right|$$



نرخ تغییرات جهت بردار واحد مماسی
نسبت به فاصله مسیر منحنی = خمیدگی مسیر

$$\rho(s) = \frac{1}{\kappa(s)}.$$

(Radius of Curvature) : ρ = شعاع خمیدگی

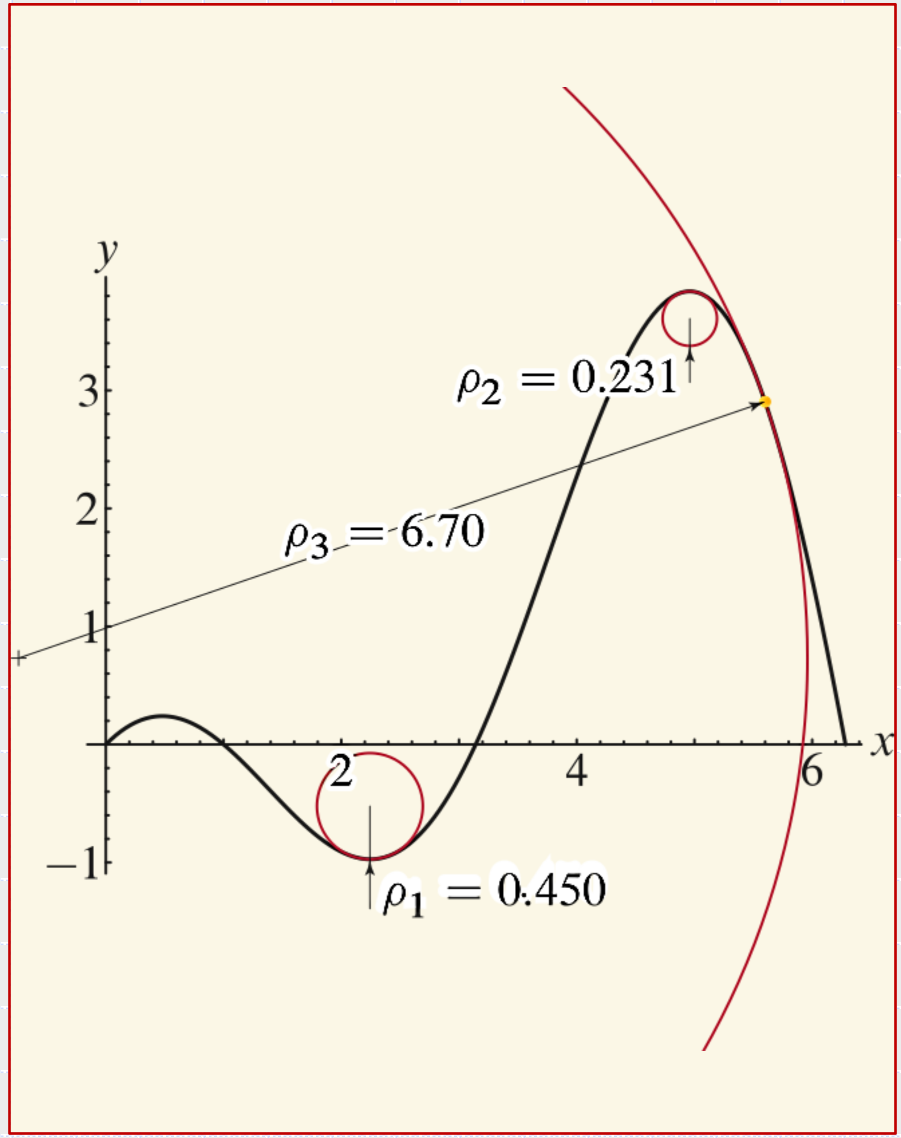
$$y = f(x)$$

$$\rho(x) = \frac{\left[1 + (dy/dx)^2\right]^{3/2}}{\left|d^2y/dx^2\right|}.$$

$$x = x(t) \quad , \quad \dot{x} = \frac{dx}{dt}$$

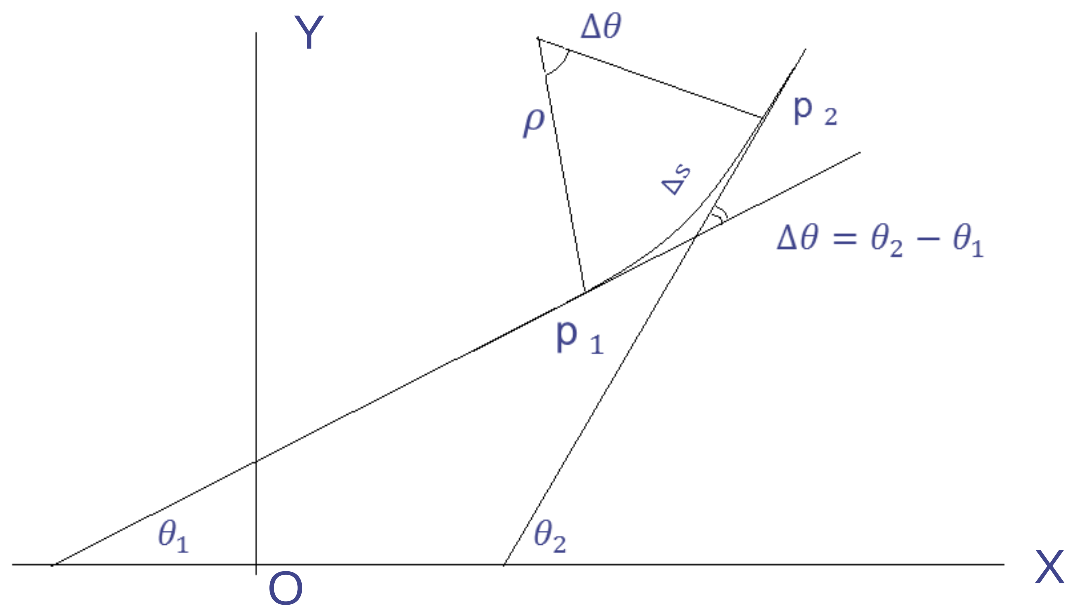
$$y = y(t) \quad , \quad \dot{y} = \frac{dy}{dt}$$

$$\rho = \frac{\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)^{3/2}}{\left|\dot{x}\,\ddot{y} - \dot{y}\,\ddot{x}\right|}$$



$$\Delta\theta = \rho\ \Delta s$$

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \lim \frac{\Delta\theta}{\Delta s} = \frac{d\theta}{ds}$$



$$\frac{dy}{dx} = \dot{y} = \tan\theta$$

$$\frac{d\dot{y}}{dx} = \frac{d}{dx}(\tan\theta) = \ddot{y}$$

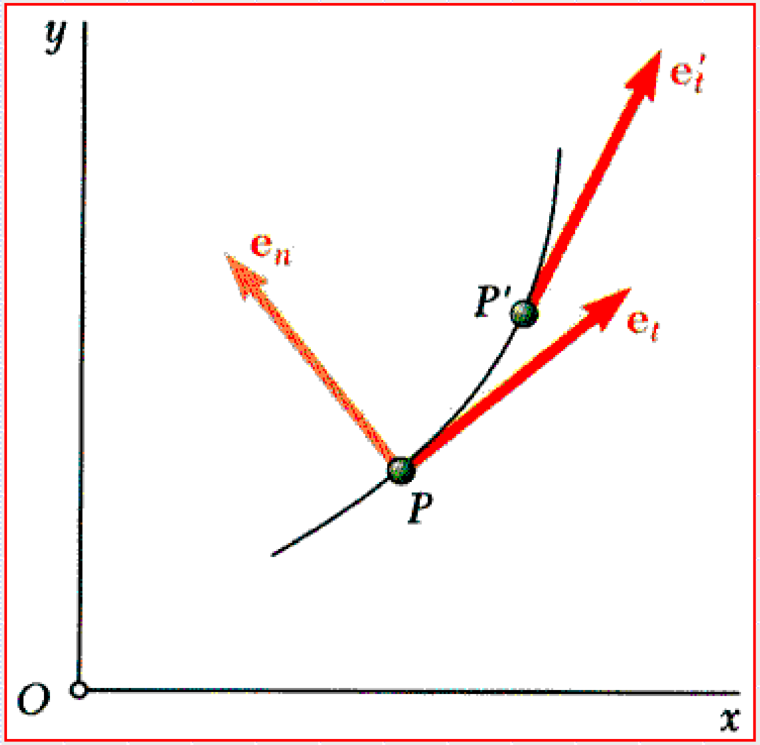
$$(1+\tan\theta^2)\frac{d\theta}{dx}=\ddot{y}$$

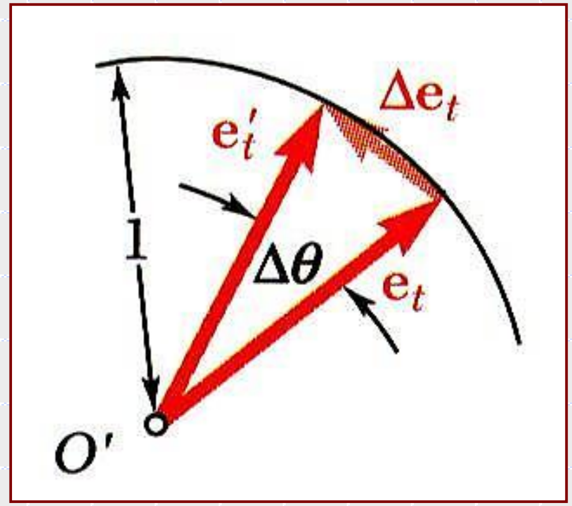
$$\ddot{y}=[1+(\dot{y})^2]\frac{d\theta}{dx}$$

$$\frac{d\theta}{dx}=\frac{\ddot{y}}{1+(\dot{y})^2}$$

$$\frac{dx}{ds}=\frac{1}{\frac{ds}{dx}}=\frac{1}{\sqrt{[(dx^2+dy^2)/dx^2]}}$$

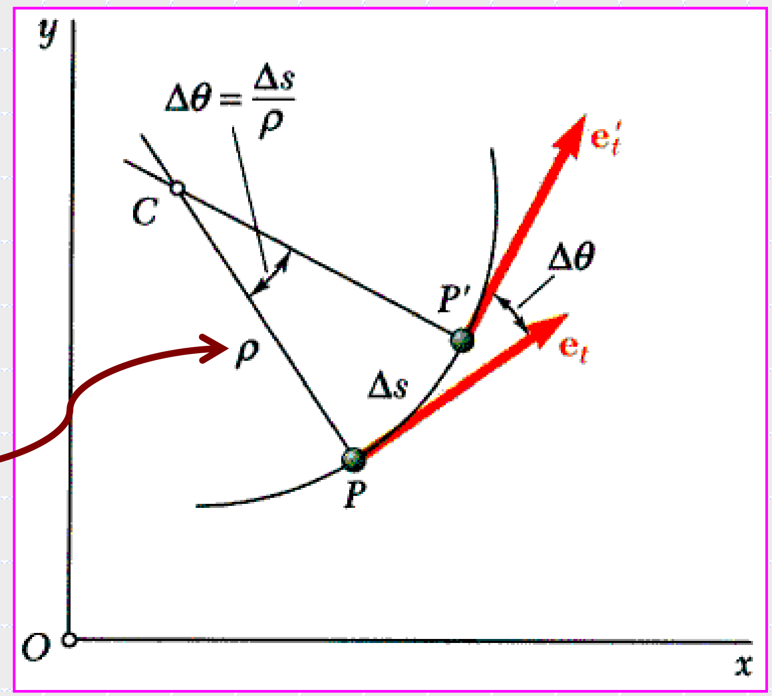
$$K=\frac{d\theta}{ds}=\left(\frac{d\theta}{dx}\right)\left(\frac{dx}{ds}\right)=\frac{\ddot{y}}{\sqrt{[(dx^2+dy^2)/dx^2]}^{3/2}}$$

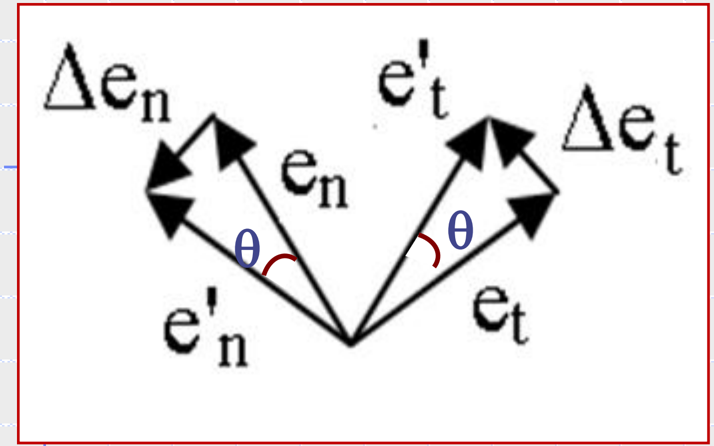




شعاع خمیدگی

$$\rho(s) = \frac{1}{\kappa(s)}.$$





$$\frac{\Delta e_t}{\Delta\theta} = \frac{2\sin\frac{\Delta\theta}{2}}{\Delta\theta} = \frac{\sin(\Delta\theta/2)}{(\Delta\theta/2)}$$

$$\lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{\Delta e_t}{\Delta\theta} = \lim\frac{\sin(\frac{\Delta\theta}{2})}{(\frac{\Delta\theta}{2})} = 1$$

$$\Rightarrow \left|\frac{de_t}{d\theta}\right| = 1$$

$$\boxed{\frac{d\vec{e}_t}{d\theta} = \vec{e}_n}$$

چون بر t عمود است و مقدار واحد را نیز داراست.

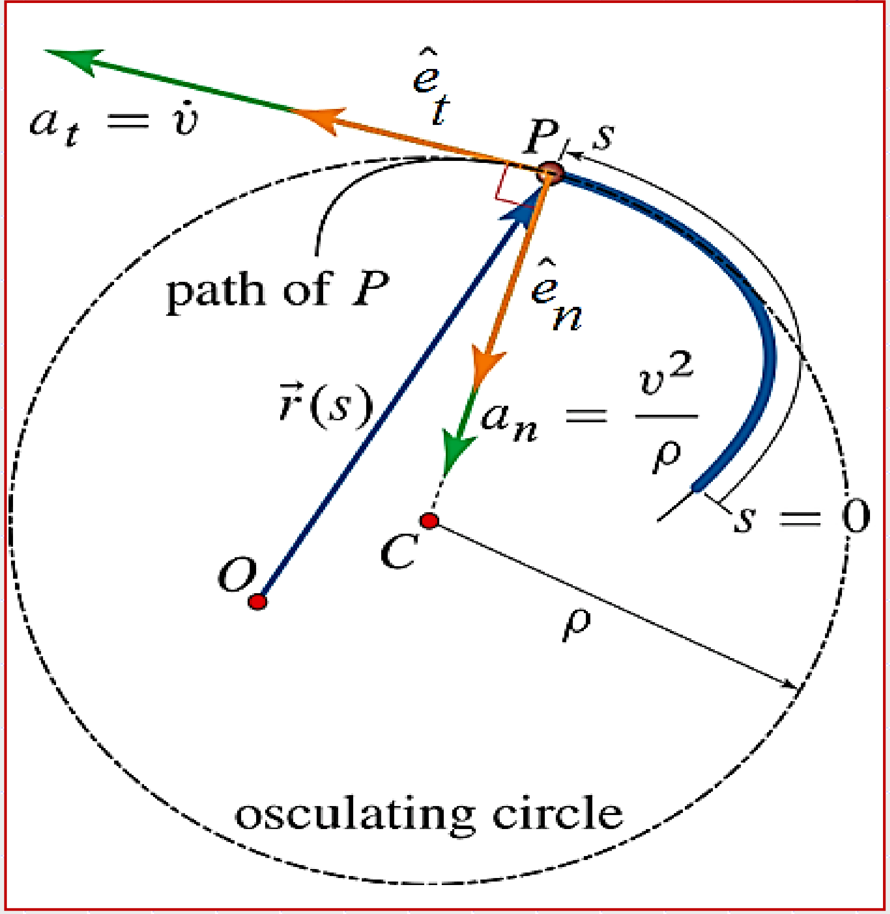
$$\boxed{\frac{d\vec{e}_t}{dt} = \left(\frac{d\vec{e}_t}{d\theta}\right)\left(\frac{d\theta}{ds}\right)\left(\frac{ds}{dt}\right) = \vec{e}_n\left(\frac{1}{\rho}\right)v}$$

ρ = شعاع خمیدگی

$$\frac{d\vec{e}_t}{dt} = \frac{v}{\rho}\vec{e}_n$$

$$\frac{d\vec{e}_t}{d\theta} = \vec{e}_n \quad , \quad \frac{d\vec{e}_n}{d\theta} = -\vec{e}_t$$

$$\hat{e}_n(s) = \frac{d\hat{e}_t(s)/ds}{|d\hat{e}_t(s)/ds|} = \frac{1}{\kappa(s)}\frac{d\hat{e}_t(s)}{ds}$$



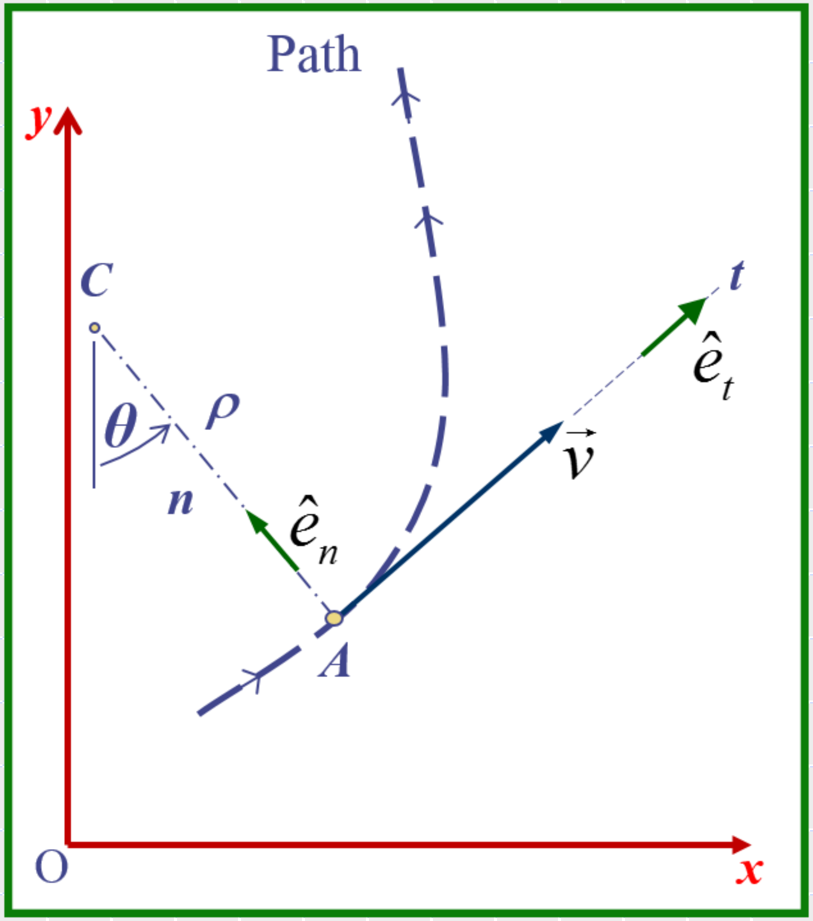
$$\begin{aligned}\vec{a} &= a_t\vec{e}_t + a_n\vec{e}_n \\ &= \frac{dv}{dt}\vec{e}_t + v\left(\frac{d\vec{e}_t}{dt}\right) \\ &= \frac{dv}{dt}\vec{e}_t + \frac{v^2}{\rho}\vec{e}_n\end{aligned}$$

$$a_t = \frac{dv}{dt} \quad , \quad a_n = \frac{v^2}{\rho}$$

در حرکت منحنی الخط با سرعت یکنواخت و فقط در نقطه عطف :

$$\begin{cases} \vec{v} = v\vec{e}_t \\ \vec{a} = \dfrac{dv}{dt}\vec{e}_t + \dfrac{v^2}{\rho}\vec{e}_n \end{cases} \qquad a = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} \dfrac{dv}{dt} = 0 \\ \\ \dfrac{v^2}{\rho} = 0 \end{matrix}$$

Alternative Proof روش دیگر اثبات:



Using *x*-*y* coordinate:

$$\hat{e}_n = -(\sin\theta)\,\hat{i} + (\cos\theta)\,\hat{j}$$

$$\hat{e}_t = (\cos\theta)\,\hat{i} + (\sin\theta)\,\hat{j}$$

$$\frac{d\hat{e}_t}{dt} = (-\dot{\theta}\sin\theta)\,\hat{i} + (\dot{\theta}\cos\theta)\,\hat{j}$$

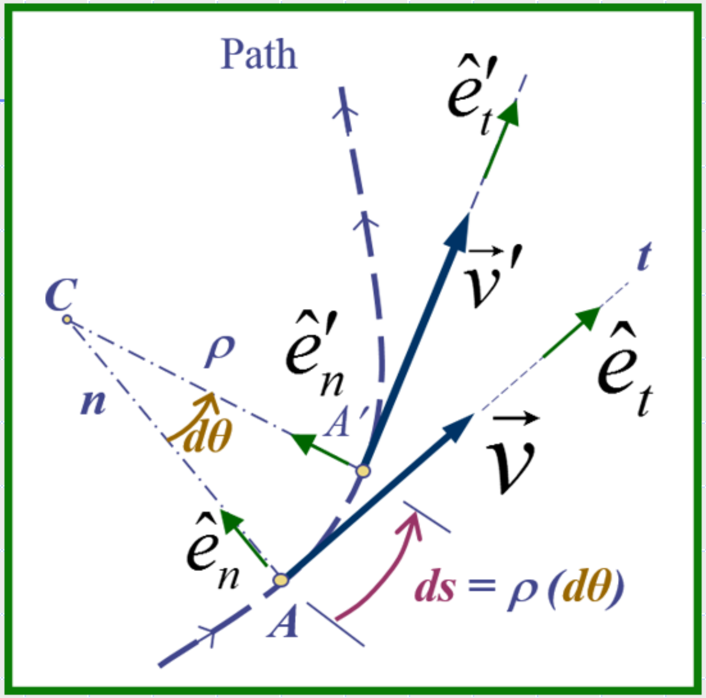
$$= \dot{\theta}\,\{(-\sin\theta)\,\hat{i} + (\cos\theta)\,\hat{j}\}$$

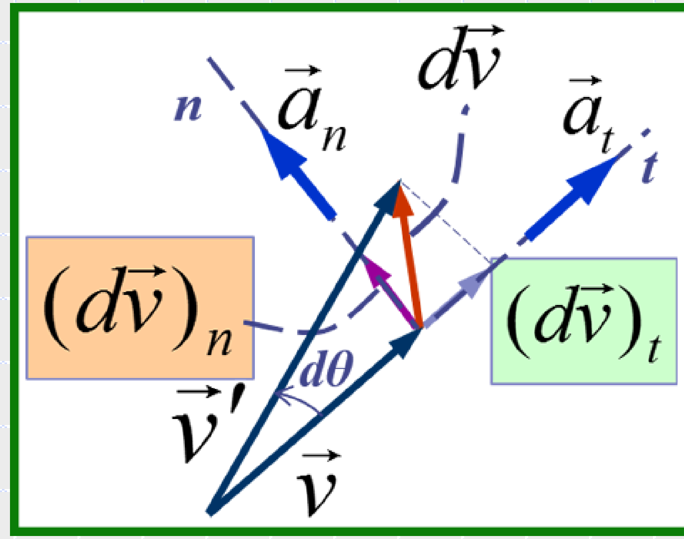
$$\boxed{\frac{d\hat{e}_t}{dt} = \dot{\theta}\,\hat{e}_n}$$

$$\boxed{\frac{d\hat{e}_n}{dt} = -\dot{\theta}\,\hat{e}_t}$$

درک روابط:

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{e}_t + v\frac{d\vec{e}_t}{dt} = \dot{v}\,\hat{e}_t + v\dot{\theta}\,\hat{e}_n$$





$$d\vec{v} \approx (d\vec{v})_t + (d\vec{v})_n$$

$$\approx |(d\vec{v})_t|\,\hat{e}_t + |(d\vec{v})_n|\,\hat{e}_n$$

$$|(d\vec{v})_t| = dv$$

$$a_t = \frac{|(d\vec{v})_t|}{dt} = \frac{dv}{dt} = \dot{v} = \ddot{s}$$

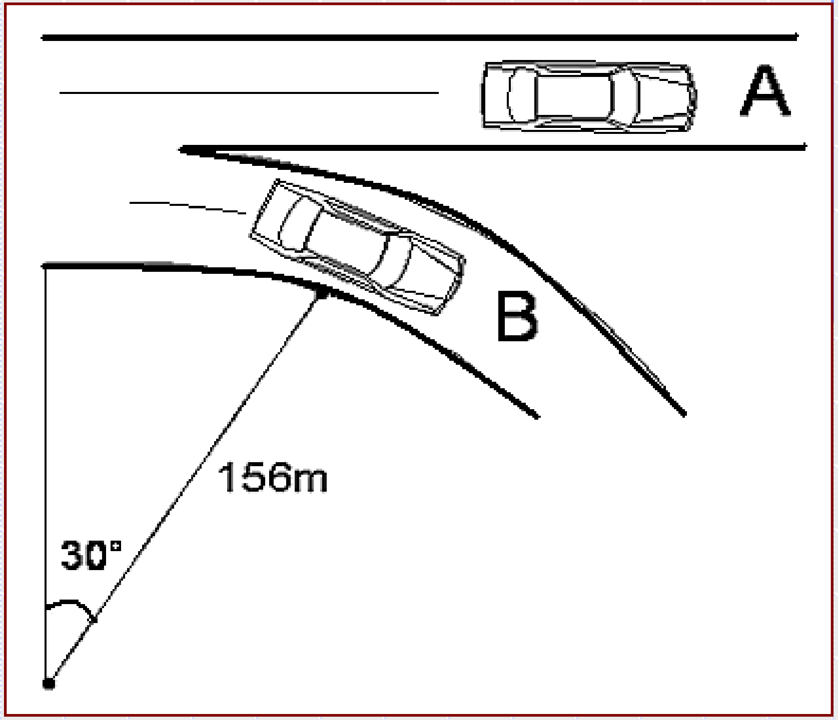
مولفه مماسی شتاب از تغییر در مقدار سرعت بوجود می آید.

$$|(d\vec{v})_n| = v\,d\theta$$

$$a_n = |(d\vec{v})_n|/dt = v\,\dot{\theta}$$

مولفه عمودی شتاب از تغییر در
جهت بردار سرعت بوجود می آید.

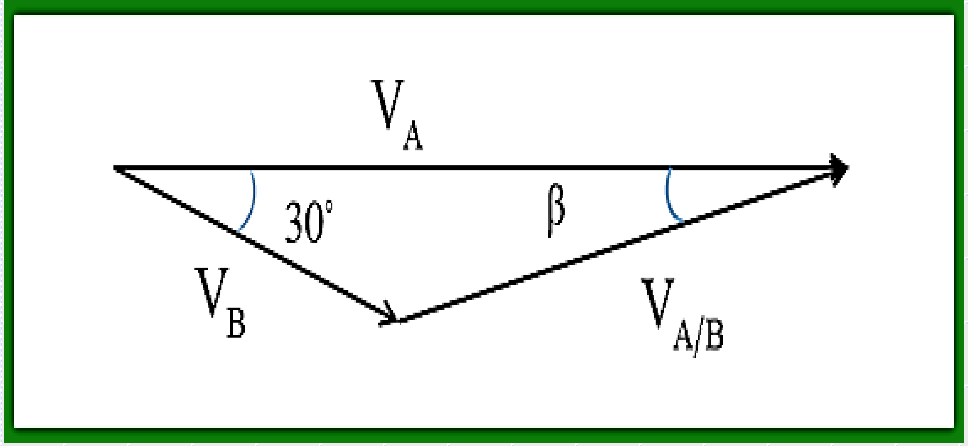
مثال: مطلوبست سرعت شتاب متحرک A نسبت به B ؟



$$V_A = \left[75\,\frac{km}{h} \rightarrow\right] = 20.8\,\frac{m}{s} \quad , \quad \dot{v}_A = 1.5\,\frac{m}{s^2} \qquad \vec{V}_{A/B} = ?$$

$$V_B = \left[40\,\frac{km}{h} \searrow\right] = 11.1\,\frac{m}{s} \quad , \quad \dot{v}_B = -0.9\,\frac{m}{s^2} \qquad \vec{a}_{A/B} = ?$$

$$\vec{V}_{A/B} = \vec{V}_A - \vec{V}_B$$



$$\vec{V}_{A/B} = [20.8 \rightarrow] - [11.1 \searrow]$$

$$V_{A/B} = \sqrt{(20.8)^2 + (11.1)^2 - 2(20.8)(11.1)Cos30}$$

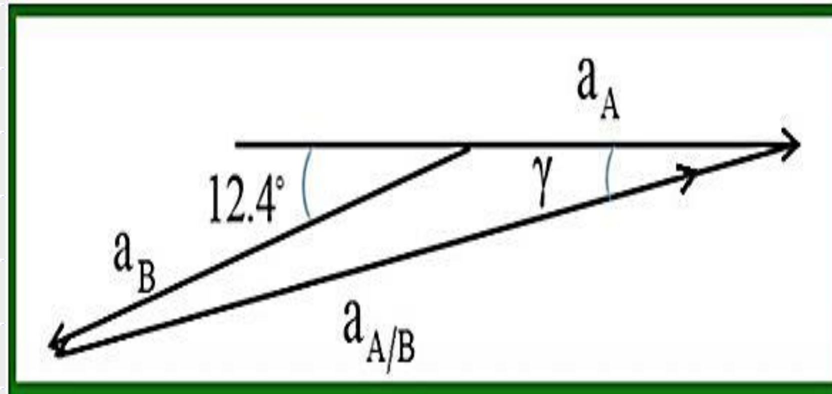
$$\Rightarrow \quad V_{A/B} = 12.5 m/s$$

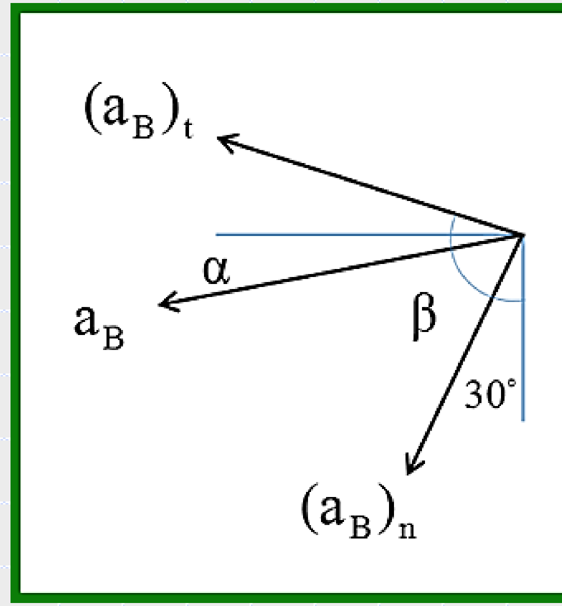
$$\frac{\sin\beta}{11.1} = \frac{\sin 30}{12.5} \quad \Rightarrow \beta = 26.4°$$

$$(a_B)_t = -0.9$$

$$(a_B)_n = \frac{V^2}{\rho} = \frac{11.1^2}{150} = 0.8\ m/s^2$$

$$\Rightarrow \quad a_B = 1.2 m/s^2 \quad , \quad \alpha = 12.4^o$$

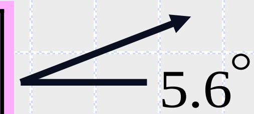




$$a_{A/B} = \sqrt{(1.5)^2 + (1.2)^2 - 2(1.5)(1.2)Cos167.6}$$

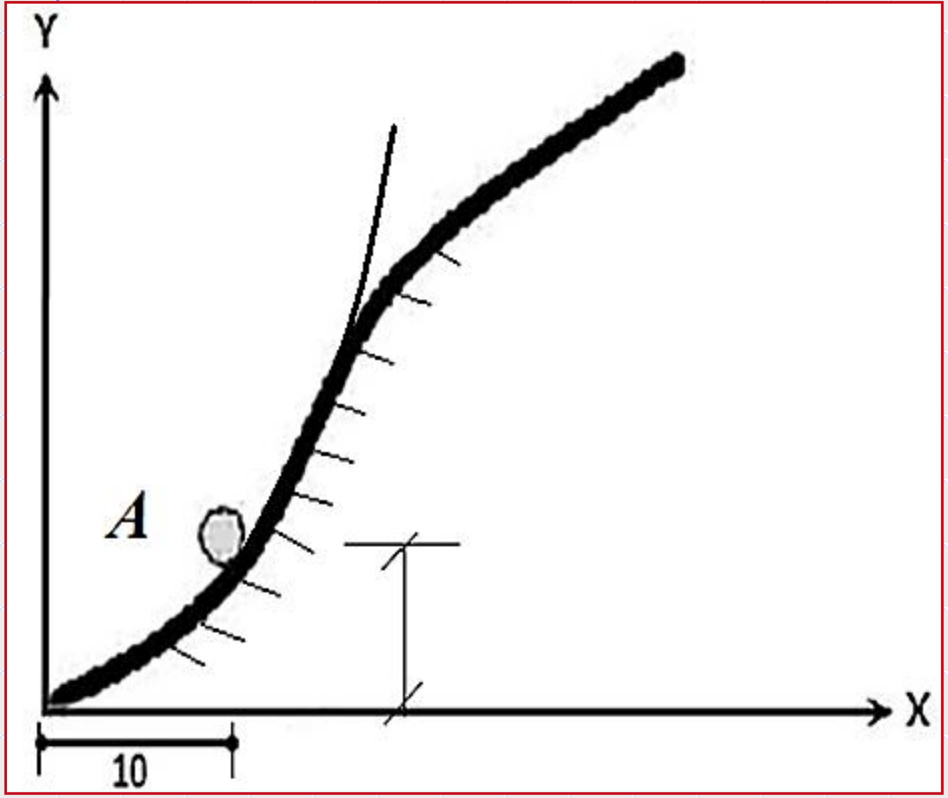
$$= 2.70\ m/s^2$$

$$\frac{\sin\gamma}{1.2} = \frac{\sin 167.6}{2.7} \Rightarrow \boxed{\gamma = 5.6^\circ}$$



مثال : سرعت اسکی باز در مسیر سهموی در نقطه **A**، $6\ {}^{m}/_{s}$ و در حال افزایش با نسبت $2\ {}^{m}/_{s^2}$ است .مطلوبست :

$$v_A = ? \ , \ a_A = ?$$



$$\begin{cases} y = \dfrac{1}{20} x^2 \\ \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{10} x \\ \dfrac{d^2 y}{dx^2} = \dfrac{1}{10} \end{cases}$$

$$@\ x = 10 \quad , \quad \frac{dy}{dx} = 1$$

$$A(10, 5)$$

$$\vec{V}_A = 6\,\frac{m}{s} \qquad 45^\circ$$

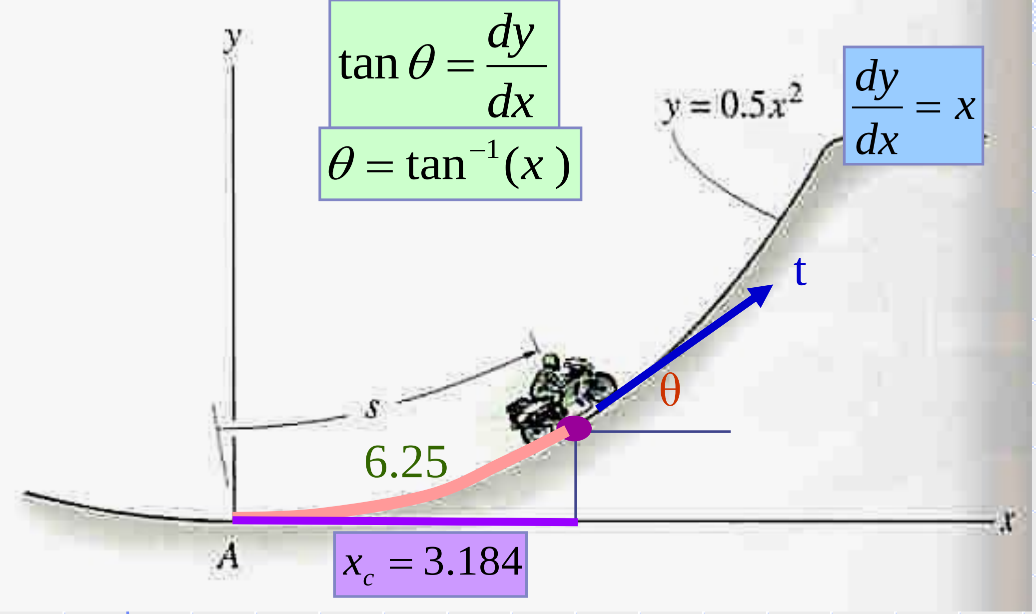
$$a_t = 2\frac{m}{s^2} \qquad 45^\circ$$

$$\rho = \frac{[1+y'^2]^{3/2}}{|y''|} = 28.28$$

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = 1.27\,\frac{m}{s^2} \qquad 45^\circ$$

$$|a_A| = \sqrt{2^2 + 1.27^2}$$

$$\vec{a}_A = 2.37\frac{m}{s^2} \qquad 12.58^\circ$$



موتور سیکلتی با سرعت 1 متر در ثانیه و با نرخ ثابت 0.1 متر در مجذور ثانیه روی مسیر مقابل شروع به حرکت میکند. مطلوبست: سرعت و شتاب در زمان 5 ثانیه از شروع حرکت.

$$\dot{v} = a_t = 0.1\ \text{m/s}^2$$

$$a_t = \frac{d}{dt}(v_t) = 0.1\ (\text{const.}) \qquad v = v_t = 1 + (0.1)t$$

$$v|_{t=5} = 1.5\ \text{m/s}$$

t=5 (x=?)   (پیدا کردن موقعیت)

$$v_t = \frac{d}{dt}(s) = 1 + 0.1t \qquad s = t + (\frac{0.1}{2})t^2$$

$$S|_{t=5} = 6.25\ \text{m}$$

$$x_c = 3.184$$

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

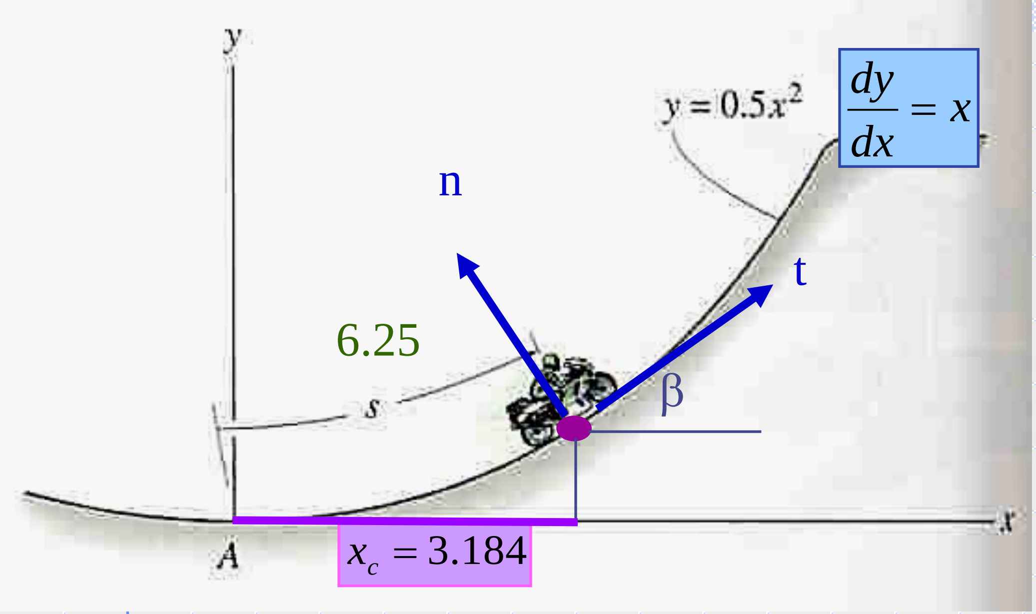
$$s = \int \sqrt{1 + x^2}\,dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{1+x^2} + \ln(x + \sqrt{1+x^2})) + C_1$$

0

s=0, x=0

$$t = 5 \quad \Rightarrow s_C = 6.25 \quad \Rightarrow x_C = 3.184$$

$$\theta|_{t=5} = \tan^{-1}(3.184) = 72.56^o$$



$$a_t = \frac{d}{dt}(v_t) = 0.1 \text{ (const.)}$$

$$v_t = 1 + (0.1)t$$

$$\boxed{v|_{t=5} = v_t|_{t=5} = 1.5 \text{ m/s}}$$

$$\boxed{\theta|_{t=5} = 72.56^o}$$

$$\boxed{\vec{a} = a_t\hat{e}_t + a_n\hat{e}_n}$$

$$a_n = \frac{v^2}{\rho}$$

$$\rho = \frac{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\left|\frac{d^2y}{dx^2}\right|} = (1 + x^2)^{\frac{3}{2}}$$

$$\rho|_{x=x_c} = (1 + 3.184^2)^{\frac{3}{2}}$$
$$= 37.171$$

$$\boxed{a_n = \frac{1.5^2}{37.171} = 0.061 \text{ m/s}^2}$$

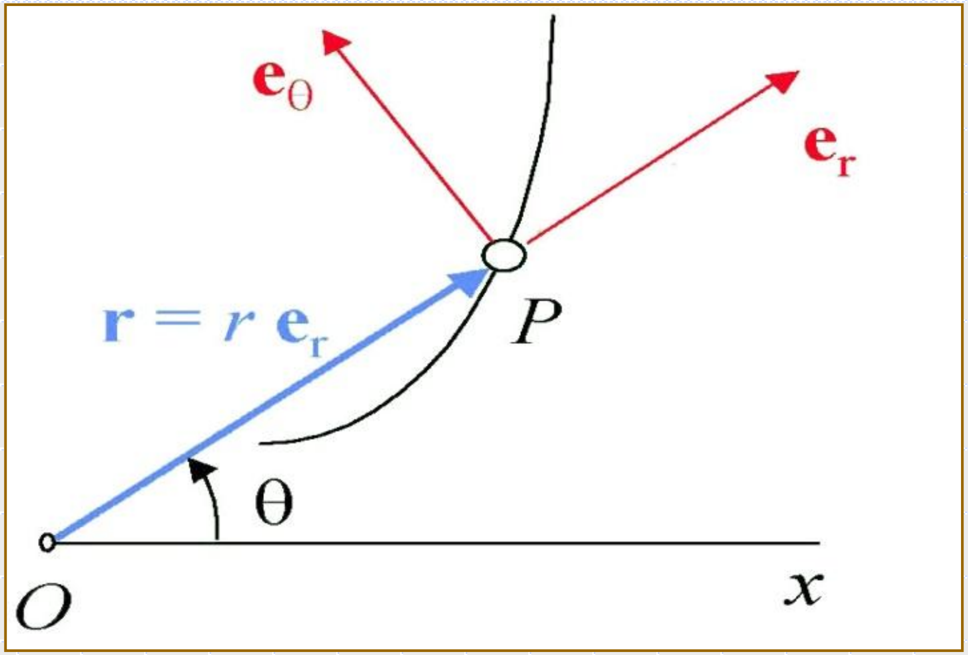
مولفه‌های شعاعی و عرضی (مختصات قطبی):

Radial & Transverse components (Polar Coordinates)

θ: مختصات زاویه‌ای

$\vec{e}_r$: بردار واحد شعاعی

$\vec{e}_\theta$: بردار واحد عرضی



$$\vec{r} = r\vec{e}_r \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d(r\vec{e}_r)}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{e}_r + r\frac{d\vec{e}_r}{dt}$$

$$\vec{v} = v_r\vec{e}_r + v_\theta\vec{e}_\theta$$

$$v_r = \frac{dr}{dt} = \dot{r}$$

تغییرات طول بردار موقعیت

$$\boxed{\frac{d\vec{e}_r}{dt}=\left(\frac{d\vec{e}_r}{d\theta}\right)\left(\frac{d\theta}{dt}\right)=\dot{\theta}\vec{e}_\theta}$$

$$\frac{\boldsymbol{r d\vec{e}_r}}{\boldsymbol{dt}}=\boldsymbol{r\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta=v_\theta\,\vec{e}_\theta}$$

$$\boxed{v_\theta=r\dot{\theta}}$$

دوران بردار موقعیت

$$\vec{v}=\dot{r}\,\vec{e}_r+r\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta$$

$$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d}{dt}(\dot{r}\vec{e}_r+r\dot{\theta}\vec{e}_\theta)$$

$$=\ddot{r}\,\vec{e}_r+\dot{r}\,\frac{d\vec{e}_r}{dt}+\dot{r}\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta+r\ddot{\theta}\,\vec{e}_\theta+r\dot{\theta}\,\frac{d\vec{e}_\theta}{dt}$$

$$\boxed{\vec{a}=a_r\,\vec{e}_r+a_\theta\,\vec{e}_\theta}$$

$$
\begin{cases}
\dfrac{d\vec{e}_r}{dt} = \dot{\theta}\vec{e}_\theta \\[2ex]
\dfrac{d\vec{e}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\vec{e}_r
\end{cases}
$$

$$
\begin{aligned}
\vec{a} &= \ddot{r}\vec{e}_r + \dot{r}\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \ddot{r}\theta\vec{e}_\theta + r\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - r\dot{\theta}^2 e_r \\
&= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{e}_\theta
\end{aligned}
$$

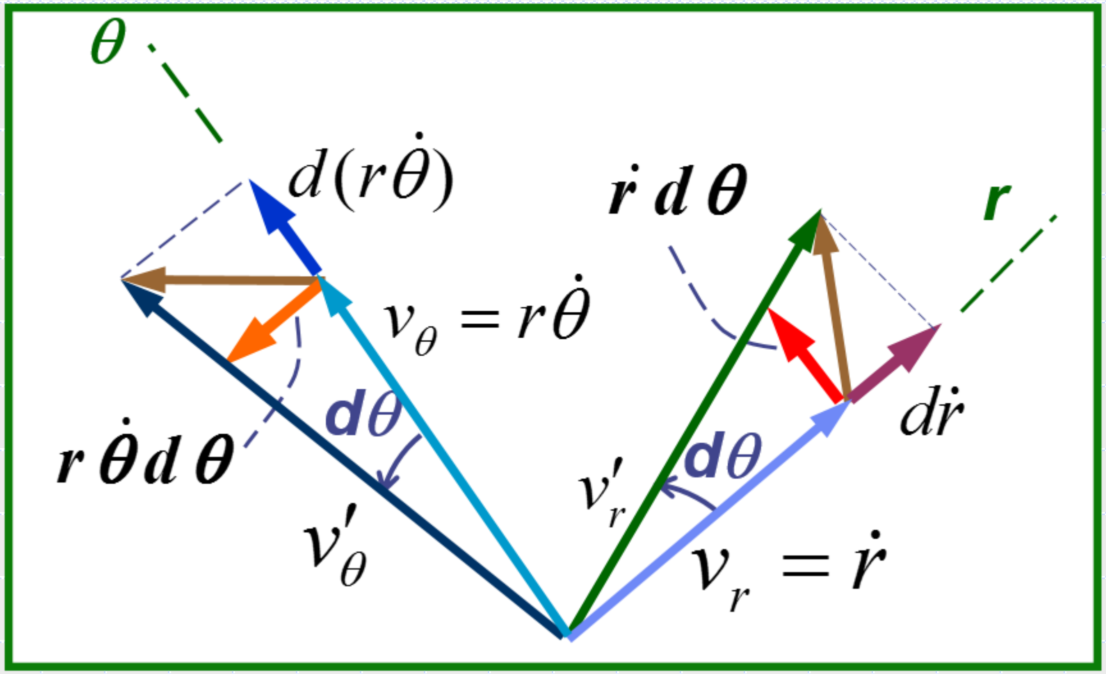
$$
\begin{aligned}
a_r &= \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\
a_\theta &= r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}
\end{aligned}
$$

$$
\underbrace{r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}}_{\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})}
$$

شتاب زاویه‌ای : $\ddot{\theta} = \alpha \quad rad/s^2$

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{e}_\theta$$

درک روابط:



تغییرات مقدار $\vec{v}_r \leftarrow d\dot{r}$

$\Rightarrow \ddot{r}$ (در جهت r)

تغییرات در جهت $\vec{v}_r \leftarrow \dot{r}d\theta$

$\Rightarrow \dot{r}\dot{\theta}$ (در جهت θ)

تغییرات مقدار $\vec{v}_\theta \leftarrow d(r\dot{\theta})$

$\Rightarrow \dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}$ (در جهت θ)

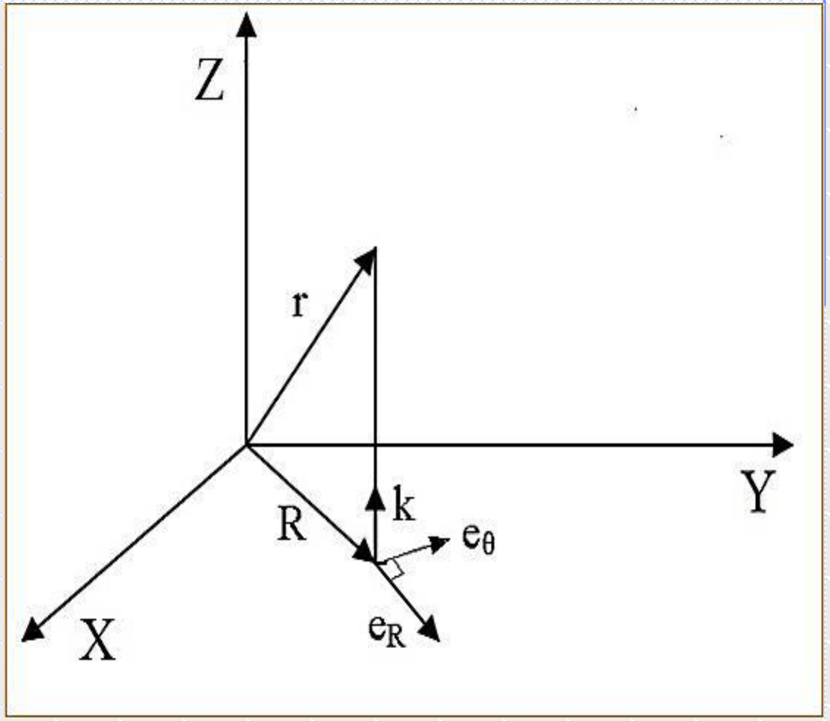
تغییرات در جهت $\vec{v}_\theta \leftarrow r\dot{\theta}d\theta$

$\Rightarrow r\dot{\theta}^2$ (در جهت $-r$)

مختصات استوانه‌ای :

$r =$ بردار موقعیت

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{r} &= \vec{R} + \vec{z} = \mathrm{R}\,\vec{\mathrm{e}}_R + z\,\vec{k} \\ \vec{v} &= \frac{d\vec{r}}{dt} \qquad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\end{aligned}}$$



$$\vec{v} = \frac{d}{dt}(R\vec{e}_R) + \frac{d}{dt}(z\vec{k})$$

$$\vec{v} = v_R\vec{e}_R + v_\theta\vec{e}_\theta + v_z\vec{k}$$

$$v_R = \dot{R} \quad , v_\theta = R\dot{\theta} \ , \ v_z = \dot{z}$$

بردار شتاب :

$$\begin{cases} a_R = \ddot{R} - R\dot{\theta}^2 \\ a_\theta = R\ddot{\theta} + 2\dot{R}\dot{\theta} \\ a_z = \ddot{z} \end{cases}$$

مثال: سرعت و شتاب نقطه‌ی B را اگر بازوی OC با سرعت زاویه ای ثابت دوران کند، بیابید.

$$r = 2b\cos\theta$$

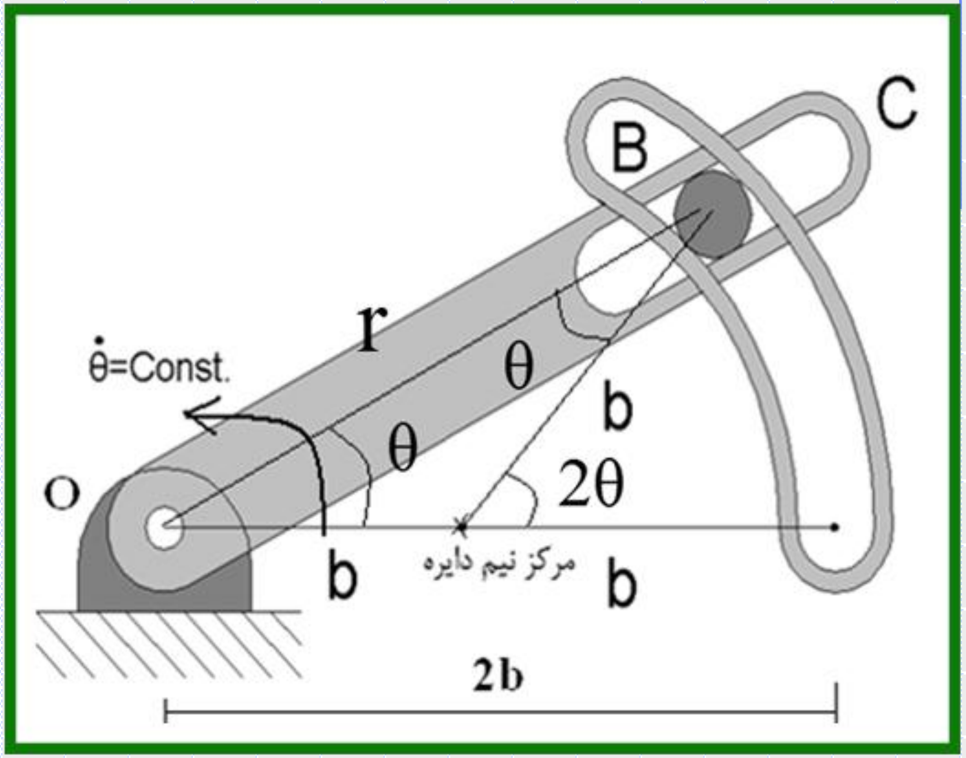
$$v_r = \dot{r} = \frac{d}{dt}(2b\cos\theta)$$

$$= 2b(-\sin\theta)(\dot{\theta})$$

$$v_\theta = r\dot{\theta} = 2b\dot{\theta}\cos(\theta)$$

$$\boxed{v = \sqrt{v_\theta^2 + v_r^2} = 2b\dot{\theta}}$$

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = ?$$



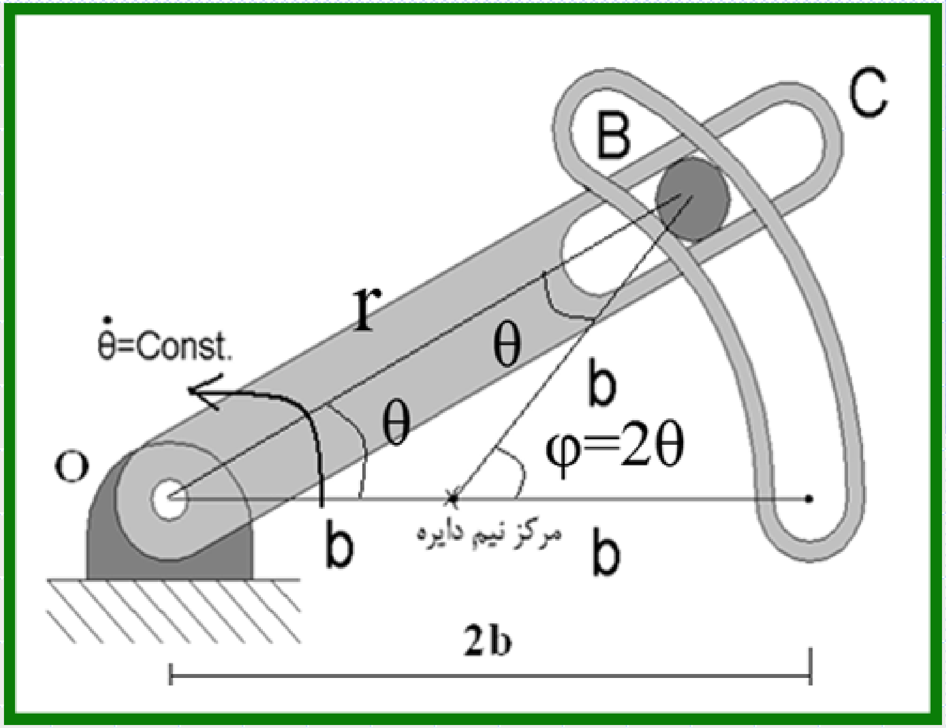
$$\ddot{r} = 2b[(-\cos\theta)(\dot{\theta})^2 + (-\sin\theta)\ddot{\theta}] = -2b\dot{\theta}^2\cos\theta$$

$$a_r = -2b\dot{\theta}^2\cos\theta - 2b\cos\theta\,\dot{\theta}^2 = -4b\dot{\theta}^2\cos\theta$$

$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = -4b\dot{\theta}^2\sin\theta$$

$$\boxed{|\vec{a}| = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2} = 4b\,\dot{\theta}^2}$$

راه حل ساده تر:
(مختصات قطبی با مرکز نیم دایره)



$$\phi = 2\theta \qquad r = b$$

$$v_r = \dot{r} = 0$$

$$v_\theta = r\dot{\phi} = 2b\dot{\theta}$$

$$v = \sqrt{v_\theta^2 + v_r^2} = 2b\dot{\theta}$$

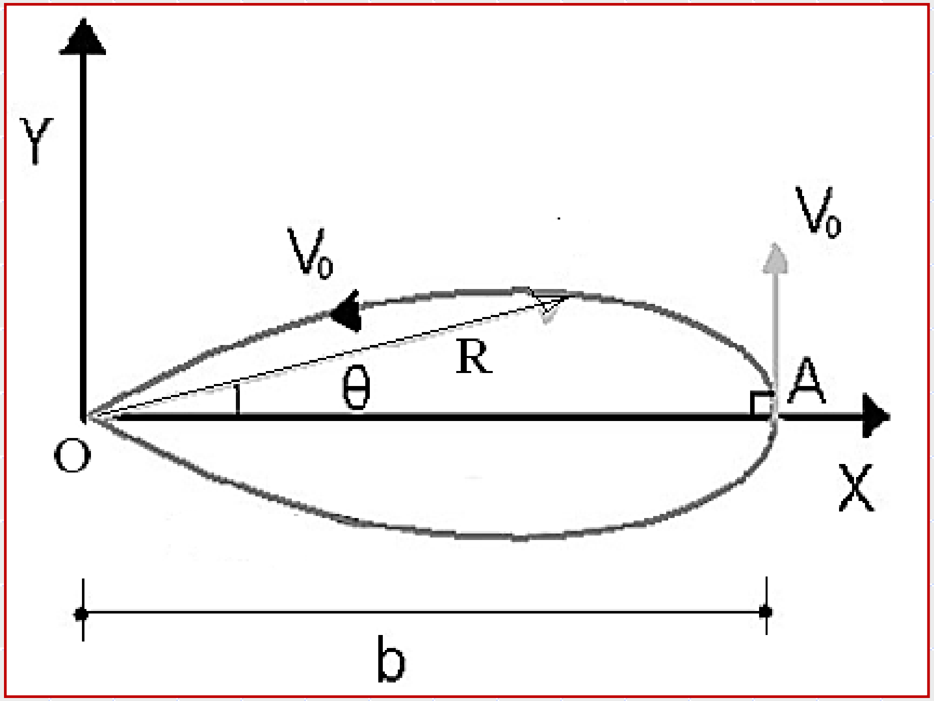
$$\ddot{r} = 0$$

$$a_r = \ddot{r} - r\,\dot{\phi}^2 = 0 - b\left(2\dot{\theta}^2\right) = -4b\dot{\theta}2$$

$$a_\theta = r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi} = 0 + 0 = 0$$

$$a = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2} = 4b\,\dot{\theta}2$$

مثال: در مسیرداده شده، سرعت ثابت است. مطلوبست: شتاب متحرک در موقعیت A ؟ ($R = b\cos 3\theta$)



حل:

$$\dot{R} = b(-\sin 3\theta)(3)(\dot{\theta}) = -3b\dot{\theta}\sin 3\theta$$

$$\ddot{R} = -3b\ddot{\theta}\sin 3\theta - 9b\dot{\theta}^2\cos 3\theta$$

$$@A \Rightarrow \begin{cases} a_t = 0 \\ a_n = \dfrac{v^2}{\rho} \end{cases} \qquad a_A \Rightarrow \begin{cases} a_r = \ddot{R} - R\dot{\theta}^2 \\ a_\theta = R\ddot{\theta} + 2\dot{R}\dot{\theta} = 0 \end{cases}$$

$$v_A \Rightarrow \begin{cases} v_r = \dot{R} = 0 \\ v_\theta = R\dot{\theta} = v_0 \end{cases} \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{v_0}{b}$$

$$@A \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{v_\circ}{b}\ ,\ R = b\ ,\ \ddot{R} = -9b\dot{\theta}^2 = -9\frac{v_\circ^2}{b}$$

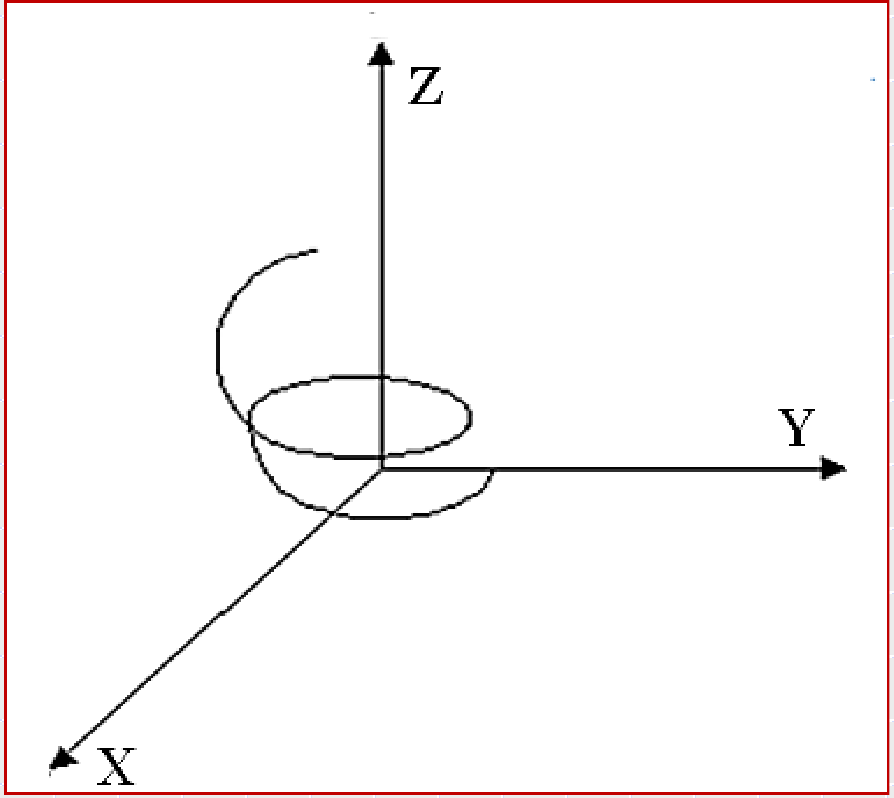
$$a_A = a_r = -9\frac{v_0^2}{b} - b\left(\frac{v_\circ^2}{b^2}\right) \qquad \boxed{a_A = -10\frac{v_\circ^2}{b}}$$

مثال: یک نقطه روی مسیری در دستگاه مختصات استوانه ای با رابطه ذیل

حرکت میکند: $\vec{r} = 3\vec{e}_R + 15t\,\vec{k}$

که در آن t متغیر برحسب زمان است. اگر $\dot{\theta} = 5 rad/s$ ثابت باشد،

مطلوبست شتاب نقطه مادی ؟



(R, θ, z)

$[\vec{e}_R, \vec{e}_\theta, \vec{k}]$

راه حل اول :

$$\vec{r} = 3\vec{e}_R + 15t\vec{k} \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = \dot{\vec{r}} = 3\dot{\vec{e}}_R + 15\vec{k}$$

$$\dot{\vec{e}}_R = \dot{\theta}\vec{e}_\theta = 5\vec{e}_\theta \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = \dot{\vec{r}} = 15\vec{e}_\theta + 15\vec{k}$$

$$\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = 15\dot{\vec{e}}_\theta + 0 \qquad \dot{\vec{e}}_\theta = -\dot{\theta}\vec{e}_R = -5\vec{e}_R$$

$$\Rightarrow \vec{a} = -75\vec{e}_R \quad \Rightarrow \quad |a| = 75 m/s^2$$

راه حل دوم :

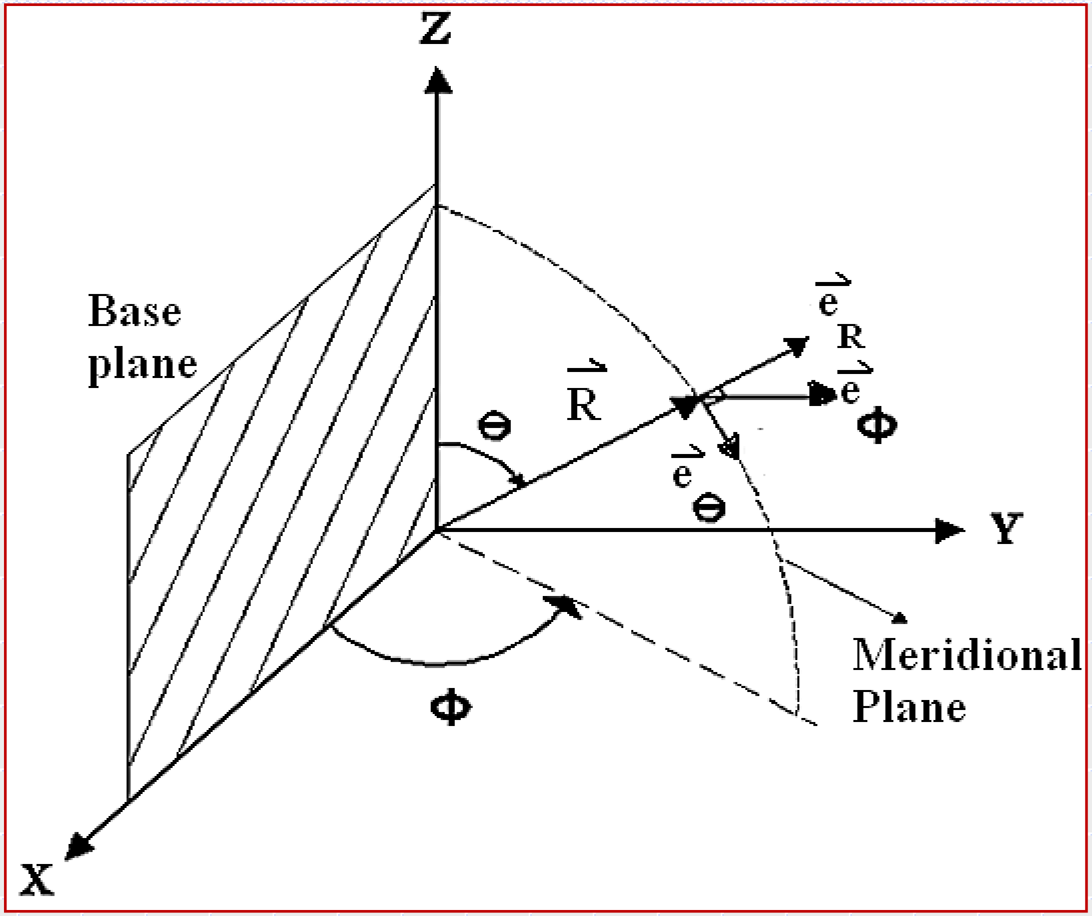
$$\vec{a} = (\ddot{R} - R\dot{\theta}^2)\vec{e}_R + (\dot{R}\ddot{\theta} + 2\dot{R}\dot{\theta})\vec{e}_\theta + \ddot{z}\vec{k}$$

$$\vec{r} = 3\vec{e}_R + 15t\vec{k} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{Bmatrix} R=3 & \dot{\theta}=5 & z=15t \\ \dot{R}=0 & \ddot{\theta}=0 & \dot{z}=15 \\ \ddot{R}=0 & & \ddot{z}=0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{a} = \left[0 - 3(5)^2\right]\vec{e}_R + \left[0+0\right]\vec{e}_\theta + 0$$

$$\vec{a} = -75\vec{e}_R$$

مختصات کروی :



$$\vec{R} = R\vec{e}_R$$

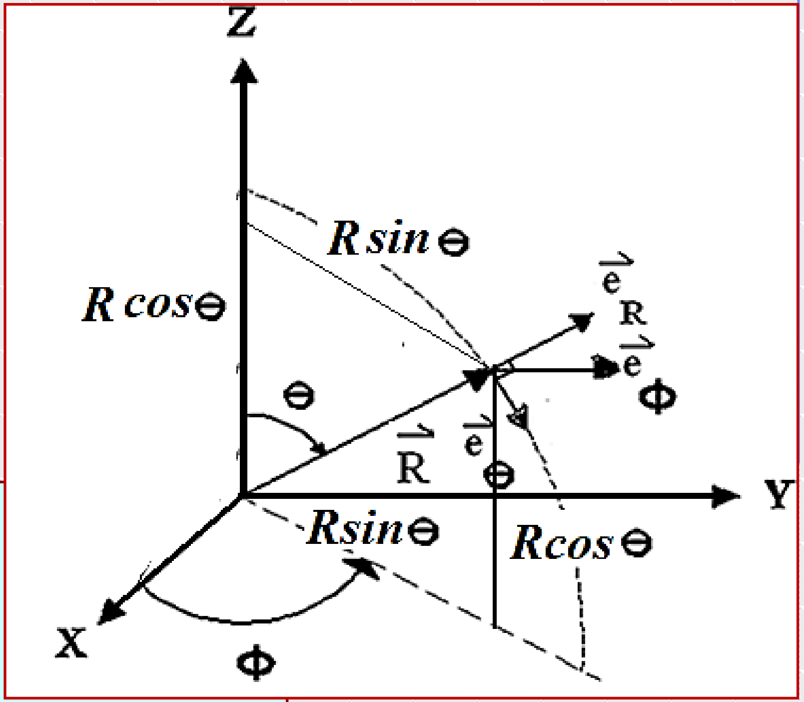
$$\vec{e}_R \times \vec{e}_\theta = \vec{e}_\phi$$

$$\vec{e}_\theta \times \vec{e}_\phi = \vec{e}_R$$

$$\vec{e}_\phi \times \vec{e}_R = \vec{e}_\theta$$

$$\begin{cases} R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \tan^{-1}\left[\sqrt{x^2 + y^2} / z\right] \\ \phi = \tan^{-1}(y / x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = R\,Sin\theta Cos\phi \\ y = R\,Sin\theta Sin\phi \\ z = R\,Cos\theta \end{cases}$$



$$\vec{e}_R = \sin\theta\cos\phi\,\vec{i} + \sin\theta\sin\phi\,\vec{j} + \cos\theta\,\vec{k}$$

$$\vec{e}_\theta = \cos\theta\cos\phi\,\vec{i} + \cos\theta\sin\phi\,\vec{j} - \sin\theta\,\vec{k}$$

$$\vec{e}_\phi = -\sin\phi\,\vec{i} + \cos\phi\,\vec{j}$$

$$\vec{R} = R\,\vec{e}_R$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(R\,\vec{e}_R\right) = \dot{R}\,\vec{e}_R + R\,\frac{d\vec{e}_R}{dt}$$

$$= \dot{R}\,\vec{e}_R + R\,\frac{d}{dt}\left(\sin\theta\cos\phi\,\vec{i} + \sin\theta\sin\phi\,\vec{j} + \cos\theta\,\vec{k}\right)$$

$$\vec{v} = v_R \vec{e}_R + v_\theta \vec{e}_\theta + v_\phi \vec{e}_\phi$$

$$\vec{v} = \dot{R}\,\vec{e}_R + R\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta + r\,\dot{\phi}\;Sin\theta\,\vec{e}_\phi$$

$$\vec{a} = a_R \vec{e}_R + a_\theta \vec{e}_\theta + a_\phi \vec{e}_\phi$$

$$\vec{a} = \left[\ddot{R} - R\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2\;Sin^2\theta\right]\vec{e}_R +$$

$$\left[R\ddot{\theta} + 2\dot{R}\dot{\theta} - R\dot{\phi}^2\;Sin\theta\;Cos\theta\right]\vec{e}_\theta +$$

$$\left[\left(R\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi}\right)Sin\theta + 2R\dot{\phi}\dot{\theta}\;Cos\theta\right]\vec{e}_\phi$$